

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS
SIMPLIFICADOS E MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS
NÃO LINEARES PARA O CÁLCULO DE FLECHA IMEDIATA
EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa
Catarina como requisito parcial
exigido pelo Programa de Pós
Graduação em Engenharia Civil
– PPGEC para obtenção do
título de MESTRE em
Engenharia Civil.

ELISABETH JUNGES

Florianópolis, maio de 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS
SIMPLIFICADOS E MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS
NÃO LINEARES PARA O CÁLCULO DE FLECHA IMEDIATA
EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

ELISABETH JUNGES

Dissertação julgada adequada para a obtenção do
Título de MESTRE em Engenharia Civil e
aprovada em sua forma final pelo Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Janaíde Cavalcante Rocha – Coordenadora do PPGEC

Henriette Lebre La Rovere, PhD – Professora Orientadora -UFSC

Comissão Examinadora:

Dr. Américo Campos Filho – UFRGS

Dr. Daniel Domingues Loriggio – ECV/UFSC

Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD – ECV/UFSC

AGRADECIMENTOS

A toda a minha família, em especial aos meus pais José Abílio e Lourdes, que sempre me apoiaram e sempre foram a base de todas as minhas conquistas.

À minha querida professora Henriette, pela excelente orientação e conhecimento compartilhado, e também pela paciência e amizade.

Aos professores Daniel Loriggio e Roberto Pinto pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas cursadas e pelas notáveis contribuições neste trabalho como membros da banca.

Ao professor Américo Campos Filho pelas importantes contribuições como membro da banca de avaliação.

Aos meus professores de graduação da Universidade Federal de Mato Grosso, em especial ao professor Cláudio Cruz Nunes, pela ajuda e incentivo para o início deste mestrado.

Ao meu colega desde a graduação, Paulo Junges, por toda a ajuda e amizade, principalmente para o início deste mestrado, e a todos os meus colegas e amigos de convivência durante o período de mestrado que de alguma forma me apoiaram e incentivaram.

Ao programa REUNI pela bolsa de estudos concedida e aos funcionários do Departamento e do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina.

E por último o agradecimento mais importante: a Deus por mais esta conquista e por todas as bênçãos recebidas ao longo de minha vida.

RESUMO

Existem diversos métodos e modelos de cálculo que levam em conta as não linearidades de material para se estimar a flecha imediata em vigas de concreto armado sob cargas de serviço. Neste trabalho é realizado um estudo comparativo entre as flechas de vigas biapoiadas e contínuas de concreto armado obtidas por métodos simplificados e por modelos refinados de elementos finitos (EF). Os métodos simplificados estudados são o proposto por Branson, tanto o original recomendado pela NBR 6118/2007, como o modificado segundo os comentários técnicos da NB-1, publicados pelo Ibracon, e também o método Bilinear indicado pelo CEB “Design Manual on Cracking and Deformations”. São utilizados dois modelos de elementos finitos, o primeiro com elementos de barra de 3 nós e 7 graus de liberdade, sendo a seção transversal subdividida em camadas, onde cada camada está sujeita a um estado uniaxial de tensões. Nesse modelo a não linearidade dos materiais é considerada a partir de relações constitutivas do aço e do concreto, que incluem um modelo refinado de “tension-stiffening”. Este modelo de EF foi implementado no programa computacional ANALEST. O segundo modelo de EF utiliza elementos de viga, sendo a não linearidade física considerada por meio de diagramas momento-curvatura, obtidos tanto a partir da fórmula de Branson como do método Bilinear. Este modelo de EF, assim como os métodos simplificados estudados, foram implementados no programa computacional AVSer, desenvolvido para realização deste trabalho. Primeiramente são realizados alguns estudos paramétricos. Após avalia-se a acurácia do modelo de EF implementado no programa ANALEST comparando os seus resultados de deslocamentos com flechas obtidas experimentalmente em diversas vigas biapoiadas de concreto armado e também algumas vigas contínuas, ensaiadas por diferentes autores. Os demais métodos e modelo de EF estudados também são comparados aos resultados experimentais para alguns exemplos. Em seguida comparam-se os resultados obtidos pelos diferentes métodos simplificados e modelos de EF para diversos exemplos de vigas de concreto armado em serviço, variando-se as características geométricas das vigas, o tipo de carregamento, resistência do concreto e taxa de armadura. Os resultados obtidos são analisados separadamente, as vigas biapoiadas das vigas contínuas, adotando como referência as flechas calculadas pelo programa ANALEST. Ao final do trabalho são extraídas conclusões e algumas recomendações quanto ao uso dos métodos e modelos estudados.

Palavras-chave: flecha imediata, viga de concreto armado, análise não linear.

ABSTRACT

There are several methods and different models that take into account the material nonlinearities for estimating the short-term deflection of reinforced concrete (RC) beams under service loads. In this work, a comparative study between deflections of simply supported and continuous RC beams obtained by simplified methods and by advanced finite element (FE) models is performed. The simplified methods include the one proposed by Branson, both the original method, recommended by the Brazilian Code NBR 6118/2007, and the modified one proposed in the technical comments of NB-1, published by IBRACON; and also the bilinear method indicated by the European Code CEB. Two finite element models are utilized; the first one uses frame elements with 3 nodes and a total of 7 degrees of freedom, with the element cross section divided into layers, where each layer is subjected to a uniaxial stress state. In this model the nonlinearity of the materials is considered by means of constitutive relationships for steel and concrete, in which a refined tension-stiffening model is included. This FE model was implemented into a computer program named ANALEST. The second FE model utilizes beam elements, and the material nonlinearities are considered by means of moment-curvature diagrams, which are obtained either from the Branson equation or from the Bilinear method. This FE model and the simplified methods analyzed were implemented into a computer program named AVSer, developed in this work. Parametric studies are initially performed, and the accuracy of the FE model implemented into ANALEST program is then evaluated by comparison between deflections obtained numerically and experimentally in several simply supported and continuous RC beams, tested by different authors. The simplified methods and the FE beam model also are compared with the experiments for some examples. Next the results obtained by the simplified methods and by the refined FE models are compared for several examples of simply supported and continuous RC beams at service, by varying the beam geometry, the loading type, the concrete strength and the reinforcing ratio. Results from the simply supported and continuous RC beams are analyzed separately, taking as reference the deflections calculated by means of the ANALEST program. Conclusions and a few recommendations regarding the use of the different methods and models are drawn at the end of the work.

Keywords: short-term deflections, reinforced concrete beams, nonlinear analysis.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE TABELAS	xxiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xxvii
1 INTRODUÇÃO	31
1.1 Justificativa	33
1.2 Objetivos.....	34
1.3 Organização dos capítulos	35
2 DEFORMAÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	37
2.1 Comportamento e estádios	37
2.1.1 Momento de fissuração e momento de inércia no estágio I e II	39
2.1.2 Momento do Início da Plastificação.....	41
2.2 Métodos simplificados para cálculo de flecha em vigas de concreto armado	41
2.2.1 Fórmula de Branson	42
2.2.2 Método Bilinear	45
2.2.3 Método CEB-FIP Model Code 1990.....	47
2.2.4 Métodos simplificados selecionados	48
2.3 Estudos realizados sobre os métodos simplificados	50
2.4 Modelos refinados para análise não linear de vigas de concreto armado	53
3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	55
3.1 Método dos elementos finitos	55
3.2 Modelo de elementos finitos de barras com seção discretizada em camadas para análise não linear de pórticos planos de concreto armado	56
3.2.1 Elemento viga/coluna linear.....	57
3.2.2 Elemento viga/coluna não linear	63
3.2.3 Método das Lamelas	69
3.2.4 Relações constitutivas dos materiais	71
3.2.5 Método de Newton-Raphson.....	75
3.2.6 Programa ANALEST	76

3.3 Modelo de elementos de viga (MEV) utilizando modelos constitutivos a partir de diagramas momento-curvatura.....	77
3.3.1 MEV-Branson.....	79
3.3.2 MEV-Bilinear	80
4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MODELO DE ELEMENTOS DE VIGA	81
4.1 Apresentação do programa.....	82
4.2 Estrutura interna	85
5 ESTUDOS PARAMÉTRICOS	89
5.1 Estudo de Malha.....	89
5.2 Estudo do Expoente da Fórmula de Branson.....	95
5.3 Estudo $1 EI_{eq} - 3 EI_{eq}$	99
5.4 Estudo paramétrico do Método Bilinear: CEB versus NBR.....	102
6 VIGAS BIAPOIADAS	111
6.1 Descrição dos estudos.....	111
6.2 Vigas biapoiadas: comparação entre resultados numéricos e experimentais.....	112
6.2.1 Viga ensaiada por Machado (2004)	113
6.2.2 Vigas ensaiadas por Fernandes (1996).....	116
6.2.3 Viga ensaiada por Araújo (2002)	120
6.2.4 Viga ensaiada por Gamino (2007)	122
6.3 Vigas teóricas biapoiadas	124
6.3.1 Variação da resistência à compressão, f_{ck}	125
6.3.2 Grupo VB-G1	128
6.3.3 Grupo VB-G2	142
6.3.4 Grupo VB-G3	153
6.3.5 Grupo VB-G4	159
6.3.6 Grupo VB-G5	166
6.3.7 Análise dos resultados.....	173
7 VIGAS CONTÍNUAS	185
7.1 Vigas contínuas: comparação entre resultados numéricos e experimentais.....	186
7.1.1 Vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)	186
7.1.2 – Viga ensaiada por Cruz (1996)	193

7.2 Vigas contínuas de dois vãos	196
7.2.1 Grupo VC-G1	197
7.2.2 Grupo VC-G2	206
7.2.3 Grupo VC-G3	210
7.2.4 Grupo VC-G4	219
7.2.5 Grupo VC-G5	223
7.2.6 Grupo VC-G6	231
7.2.7 Grupo VCA-G1	236
7.2.8 Grupo VCA-G2	240
7.3 Vigas teóricas de três vãos	244
7.3.1 Grupo VC3V-G1	245
7.3.2 Grupo VC3V-G2	249
7.3.3 Grupo VC3V-G3	254
7.3.4 Grupo VC3V-G4	258
7.4 Análise dos resultados das vigas de projeto	262
7.4.1 Análise das vigas de dois vãos	272
7.4.2 Análise das vigas de três vãos	274
8. CONCLUSÕES	277
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	281
ANEXO A - Detalhamento das armaduras das vigas teóricas	285
A.1 Detalhamento das armaduras das vigas biapoiadas	285
A.1.1 Grupo VB-G1	285
A.1.2 Grupo VB-G2	287
A.1.3 Grupo VB-G3	290
A.1.4 Grupo VB-G4	291
A.1.5 Grupo VB-G5	293
A.2 Detalhamento das armaduras das vigas contínuas	294
A.2.1 Grupo VC-G1	294
A.2.2 Grupo VC-G2	297
A.2.3 Grupo VC-G3	298
A.2.4 Grupo VC-G4	301
A.2.5 Grupo VC-G5	302
A.2.6 Grupo VC-G6	305
A.2.7 Grupo VCA-G1	306
A.2.8 Grupo VCA-G2	308
A.2.9 Grupo VC3V-G1	310

A.2.10 Grupo VC3V-G2.....	312
A.2.11 Grupo VC3V-G3.....	314
A.2.12 Grupo VC3V-G4.....	316

ANEXO B - Gráficos com as flechas ao longo das vigas para a carga total de serviço 319

B.1 Vigas biapoiadas.....	319
B.1.1 Grupo VB-G1.....	319
B.1.2 Grupo VB-G2.....	322
B.1.3 Grupo VB-G3.....	326
B.1.4 Grupo VB-G4.....	328
B.1.5 Grupo VB-G5.....	330
B.2 Vigas Contínuas.....	331
B.2.1 Grupo VC-G1.....	332
B.2.2 Grupo VC-G2.....	335
B.2.3 Grupo VC-G3.....	337
B.2.4 Grupo VC-G4.....	341
B.2.5 Grupo VC-G5.....	343
B.2.6 Grupo VC-G6.....	347
B.2.7 Grupo VCA-G1.....	349
B.2.8 Grupo VCA-G2.....	351
B.2.9 Grupo VC3V-G1.....	353
B.2.10 Grupo VC3V-G2.....	355
B.2.11 Grupo VC3V-G3.....	357
B.2.12 Grupo VC3V-G4.....	359

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Intensidade do carregamento versus flecha instantânea no meio do vão de uma viga biapoiada (GHALI, 2002).	38
Figura 2.2 – Seção transversal no Estádio I.	40
Figura 2.3 – Seção transversal no Estádio II.	41
Figura 2.4 – Seção transversal no estádio II com forças resultantes.	41
Figura 2.5 – Ponderação da rigidez equivalente para vão de viga contínua.	44
Figura 2.6 – Definição de la, lb, lo pelo diagrama de momento fletor (CEB-FIP, 1990)	48
Figura 3.1 – Exemplo de discretização de viga em elementos finitos planos.	55
Figura 3.2 – Elemento de treliça com 3 nós (CHIMELLO, 2003)	58
Figura 3.3 – Elemento finito de viga (CHIMELLO, 2003)	60
Figura 3.4 – Elemento após deformação (CHIMELLO, 2003)	61
Figura 3.5 – Elemento de barra não linear com 7 graus de liberdade (CHIMELLO, 2003)	64
Figura 3.6 – Métodos das Lamelas: a) discretização da seção em lamelas; b) distribuição de deformações; c) esforços totais. (CHIMELLO, 2003).	69
Figura 3.7 – Curva tensão-deformação para o aço	74
Figura 3.8 – Rigidez secante no diagrama momento-curvatura.	78
Figura 3.9 – Posição dos 3 pontos de Gauss no elemento	79
Figura 4.1 – Janela inicial do programa AVSer.	82
Figura 4.2 – Arquivo modelo do programa AVSer	83
Figura 4.3 – Janela de resultados do programa AVSer.	85
Figura 4.4 - Fluxograma do módulo de resolução de vigas hiperestáticas pela análise matricial (módulo 3).	86
Figura 4.5 – Fluxograma de cálculo pelo Modelo Refinado de Barras.	87
Figura 5.1 – Geometria, armação e carregamento da viga VC-1	90
Figura 5.2 – Definição das malhas da viga VC1	91
Figura 5.3 – Gráfico carga-flecha do MEV-Branson para cada malha da VC1	91
Figura 5.4 – Gráfico flecha-viga do MEV-Branson para cada malha da VC1	92
Figura 5.5 – Gráfico carga-flecha do MEV-Bilinear para cada malha da VC1	92
Figura 5.6 - Gráfico flecha-viga do MEV-Bilinear para cada malha da VC1.	92
Figura 5.7 - Gráfico carga-flecha do modelo do Analest para cada malha da viga VC1	93
Figura 5.8 – Gráfico carga-flecha: estudo do expoente da fórmula de Branson da viga VC1	95
Figura 5.9 – Flecha ao longo da viga VC1: estudo do expoente da fórmula de Branson	95
Figura 5.10 – Geometria e carregamento do grupo VB-G21	96

Figura 5.11 - Gráfico carga-flecha VB-G212: estudo do expoente da fórmula de Branson.....	97
Figura 5.12 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G213: estudo do expoente da fórmula de Branson.....	97
Figura 5.13 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G214: estudo do expoente da fórmula de Branson	98
Figura 5.14 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G216: estudo do expoente da fórmula de Branson	98
Figura 5.15 – Gráfico carga-flecha do estudo 1E1eq/3E1eq da viga VC1 malha 2 ..	100
Figura 5.16 - Gráfico carga-flecha do estudo 1E1eq/3E1eq da viga VC1 malha 3 ..	100
Figura 5.17 - Gráfico carga-flecha do estudo 1E1eq/3E1eq da viga VC1 malha 4 ..	101
Figura 5.18 – VB-fck20: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	103
Figura 5.19 – VB-fk25: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	104
Figura 5.20 – VB-fck30: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	104
Figura 5.21 – VB-fck35: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	105
Figura 5.22 – VB-fck40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	105
Figura 5.23 – VB-G212: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	107
Figura 5.24 – VB-G213: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	107
Figura 5.25 – VB-G214: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	108
Figura 5.26 – VB-G216: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	108
 Figura 6.1 - Geometria da viga VR.....	 113
Figura 6.2 - Armação da viga VR (MACHADO, 2004)	114
Figura 6.3 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VR.....	115
Figura 6.4 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VR para todos os modelos.	115
Figura 6.5 – Geometria e armação das vigas ensaiadas por Fernandes (1996).	116
Figura 6.6 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1 ensaiada por Fernandes (1996).....	117
Figura 6.7 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V2 ensaiada por Fernandes (1996).....	117
Figura 6.8 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V3 ensaiada por Fernandes (1996).....	118
Figura 6.9 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1 para todos os modelos	118
Figura 6.10 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V2 para todos os modelos	119
Figura 6.11 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V3 para todos os modelos	119
Figura 6.12 – Geometria e armação da viga V1B	120
Figura 6.13 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1B ..	121
Figura 6.14 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1B para todos os modelos	121
Figura 6.15 – Geometria e armação da viga REF1 ensaiada por Gamino (2007) ...	122
Figura 6.16 – Gráfico carga versus flecha da viga REF1	123
Figura 6.17 – Geometria e carregamento das vigas VB-fck	125
Figura 6.18 – Armação das vigas VB-fck.....	126

Figura 6.19 – Variação da resistência à compressão f_{ck} : gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão das vigas VB-fck	127
Figura 6.20 – Variação da flecha correspondente à carga máxima com o aumento da resistência à compressão do concreto para o grupo VB-fck	128
Figura 6.21 – Subgrupo VB-G11: geometria e carregamento	129
Figura 6.22 – VB-G111 e VB-G112: contribuição do concreto tracionado na rigidez da peça	130
Figura 6.23 – VB-G113 e VB-G114: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça	130
Figura 6.24 – VB-G115: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça ...	131
Figura 6.25 – VB-G116: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça ...	131
Figura 6.26 – VB-G117: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça ...	132
Figura 6.27 – VB-G118: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça ...	132
Figura 6.28 – VB-G112: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	134
Figura 6.29 – VB-G113: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	134
Figura 6.30 – VB-G114: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	135
Figura 6.31 – VB-G115: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	135
Figura 6.32 – VB-G116: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	136
Figura 6.33 – VB-G117: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	136
Figura 6.34 – VB-G118: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	137
Figura 6.35 – Subgrupo VB-G11: resultado das flechas finais.....	137
Figura 6.36 – Subgrupo VB-G12: geometria e carregamento	139
Figura 6.37 – VB-G121: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	140
Figura 6.38 – VB-G122: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	141
Figura 6.39 – VB-G123: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	141
Figura 6.40 – Subgrupo VB-G12: resultados das flechas finais.....	142
Figura 6.41 – Subgrupo VB-G21: geometria e carregamento	143
Figura 6.42 – VB-G211: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	144
Figura 6.43 – VB-G212: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	144
Figura 6.44 – VB-G213: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	145
Figura 6.45 – VB-G214: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	145
Figura 6.46 – VB-G215: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	146
Figura 6.47 – VB-G216: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	146
Figura 6.48 – VB-G217: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	147
Figura 6.49 – VB-G218: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	147
Figura 6.50 – VB-G219: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	148
Figura 6.51 – Subgrupo VB-G21: resultados das flechas finais	149
Figura 6.52 – Subgrupo VB-G22: geometria e carregamento	150
Figura 6.53 – VB-G221: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	151
Figura 6.54 – VB-G222: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	151
Figura 6.55 – VB-G223: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	152
Figura 6.56 – Subgrupo VB-G22: resultados das flechas finais	153
Figura 6.57 – Subgrupo VB-G31: geometria e carregamento	154
Figura 6.58 – VB-G311: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	154
Figura 6.59 – VB-G312: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	155
Figura 6.60 – VB-G313: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão.....	155
Figura 6.61 – Subgrupo VB-G31: resultados das flechas finais	156

Figura 6.62 – Subgrupo VB-G32: geometria e carregamento.....	157
Figura 6.63 – VB-G321: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	157
Figura 6.64 – VB-G322: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	158
Figura 6.65 – VB-G323: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	158
Figura 6.66 – Subgrupo VB-G32: resultados das flechas finais.....	159
Figura 6.68 – Subgrupo VB-G41: geometria e carregamento.....	160
Figura 6.69 – VB-G411: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	160
Figura 6.70 – VB-G412: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	161
Figura 6.71 – VB-G413: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	161
Figura 6.72 – Subgrupo VB-G41: resultados das flechas finais.....	162
Figura 6.73 – Subgrupo VB-G42: geometria e carregamento.....	163
Figura 6.74 – VB-G41: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	163
Figura 6.75 – VB-G42: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	164
Figura 6.76 – VB-G43: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	164
Figura 6.77 – Subgrupo VB-G42: resultados das flechas finais.....	165
Figura 6.78 – Subgrupo VB-G51: geometria e carregamento.....	166
Figura 6.79 – VB-G511: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	167
Figura 6.80 – VB-G512: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	167
Figura 6.81 – VB-G513: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	168
Figura 6.82 – Subgrupo VB-G51: resultados das flechas finais.....	169
Figura 6.83 – Subgrupo VB-G52: geometria e carregamento.....	170
Figura 6.84 – VB-G521: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	170
Figura 6.85 – VB-G522: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	171
Figura 6.86 – VB-G523: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	171
Figura 6.87 – Subgrupo VB-G52: resultados das flechas finais.....	172
Figura 6.88 – Média 1 das diferenças percentuais dos métodos em relação aos resultados do Analest	173
Figura 6.89 – Branson-NBR: diferença percentual-taxa de armadura	175
Figura 6.90 – Bilinear: diferença percentual – taxa de armadura.....	176
Figura 6.91 – MEV-Branson: diferença percentual-taxa de armadura.....	176
Figura 6.92 – MEV-Bilinear: diferença percentual-taxa de armadura	177
Figura 6.93 – Branson-NBR: diferença percentual-vão fissurado	178
Figura 6.94 – Bilinear: diferença percentual-vão fissurado	178
Figura 6.95 – MEV-Branson: diferença percentual-vão fissurado.....	179
Figura 6.96 – MEV-Bilinear: diferença percentual-vão fissurado	179
Figura 6.97 – Comparação das flechas obtidas pelo Analest entre subgrupos	181
Figura 6.98 – Média 1 das diferenças percentuais em relação aos resultados do Analest das vigas submetidas a carga distribuída e carga concentrada	183

Figura 7.1 – Geometria e armação longitudinal das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962).....	186
Figura 7.2 – HH1: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	188
Figura 7.3 – HH2: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	188
Figura 7.4 – HH3: gráfico carga versus flecha no meio do vão	189
Figura 7.5 – HH4: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	189
Figura 7.6 – HH5: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	190

Figura 7.7 – HH1: gráfico carga versus flecha no meio do vão para todos os modelos	191
Figura 7.8 – HH2: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos	191
Figura 7.9 – HH3: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos	192
Figura 7.10 – HH4: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos.....	192
Figura 7.11 – HH5: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos.....	193
Figura 7.12 – V1A-40: geometria e carregamento	194
Figura 7.13 – V1A-40: detalhamento da armação longitudinal	194
Figura 7.14 – V1A-40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão	195
Figura 7.15 – V1A-40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos	196
Figura 7.16 – Subgrupo VC-G11: geometria e carregamento	198
Figura 7.17 – VC-G111: gráfico carga-flecha para seção com flecha máxima	199
Figura 7.18 – VC-G112: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	199
Figura 7. 19 – VC-G113: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	200
Figura 7.20 – VC-G114: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	200
Figura 7.21 – Subgrupo VC-G11: resultados das flechas finais	201
Figura 7.22 – Subgrupo VC-G12: geometria e tipo de carregamento	202
Figura 7.23 – VC-G121: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	203
Figura 7.24 – VC-G122: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	203
Figura 7.25 – VC-G123: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	204
Figura 7.26 – VC-G124: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	204
Figura 7.27 – Subgrupo VC-G12: resultados das flechas finais	205
Figura 7.28 – Grupo VC-G2: geometria e tipo de carregamento.....	206
Figura 7.29 – VC-G211: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	207
Figura 7.30 – VC-G212: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	208
Figura 7.31 – VC-G213: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	208
Figura 7.32 – VC-G214: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	209
Figura 7.33 – Grupo VC-G2: resultados das flechas finais	209
Figura 7.34 – Subgrupo VC-G31: geometria e tipo de carregamento	210
Figura 7.35 – VC-G311: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	211

Figura 7.36 – VC-G312: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	212
Figura 7.37 – VC-G313: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	212
Figura 7.38 – VC-G314: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	213
Figura 7.39 – Subgrupo VC-G31: resultados das flechas	214
Figura 7.40 – Subgrupo VC-G32: geometria e tipo de carregamento	214
Figura 7.41 – VC-G321: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	215
Figura 7.42 – VC-G322: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	216
Figura 7.43 – VC-G323: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	216
Figura 7.44 – VC-G324: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	217
Figura 7.45 – Subgrupo VC-G32: resultados das flechas finais.....	218
Figura 7.46 – Grupo VC-G4: geometria e tipo de carregamento	219
Figura 7.47 – VC-G411: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	220
Figura 7.48 – VC-G412: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	220
Figura 7.49 – VC-G413: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	221
Figura 7.50 – VC-G414: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	221
Figura 7.51 – Grupo VC-G4: resultados das flechas.....	222
Figura 7.52 – Subgrupo VC-G51: geometria e tipo de carregamento	223
Figura 7.53 – VC-G511: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	224
Figura 7.54 – VC-G512: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	225
Figura 7.55 – VC-G513: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	225
Figura 7.56 – VC-G514: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	226
Figura 7.57 – Subgrupo VC-G51: resultados das flechas finais.....	227
Figura 7.58 – Subgrupo VC-G52: geometria e tipo de carregamento	228
Figura 7.59 – VC-G521: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	228
Figura 7.60 – VC-G522: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	229
Figura 7.61 – VC-G523: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	229
Figura 7.62 – VC-G524: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima	230
Figura 7.63 – Subgrupo VC-G52: resultados das flechas	230

Figura 7.64 – Grupo VC-G6: geometria e tipo de carregamento.....	231
Figura 7.65 – VC-G611: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	232
Figura 7.66 – VC-G612: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	233
Figura 7.67 – VC-G613: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	233
Figura 7.68 – VC-G614: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima.....	234
Figura 7.69 – Grupo VC-G6: resultados das flechas finais	235
Figura 7.70 – VCA-G1: geometria e tipo de carregamento.....	236
Figura 7.71 – VCA-G11: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	237
Figura 7.72 – VCA-G12: gráfico carga aplicada versus flecha da seção para seção com flecha máxima no primeiro vão	237
Figura 7.73 – VCA-G13: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	238
Figura 7.74 – VCA-G14: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	238
Figura 7.75 – Grupo VCA-G1: resultado das flechas finais	239
Figura 7.76 – Grupo VCA-G2: geometria e tipo de carregamento.....	240
Figura 7.77 – VCA-G21: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	241
Figura 7.78 – VCA-G22: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	242
Figura 7.79 – VCA-G23: gráfico carga aplicada versus flecha da seção para seção com flecha máxima no primeiro vão	242
Figura 7.80 – VCA-G24: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão.....	243
Figura 7.81 – Grupo VCA-G2: resultado das flechas finais	243
Figura 7.83 – Grupo VC3V-G1: geometria e carregamento.....	245
Figura 7.84 – VC3V-G11: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	246
Figura 7.85 – VC3V-G12: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	247
Figura 7.86 – VC3V-G13: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	247
Figura 7.87 – VC3V-G14: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	248
Figura 7.88 – Grupo VC3V-G1: resultados das flechas finais	249
Figura 7.89 – Grupo VC3V-G2: geometria e tipo de carregamento.....	250
Figura 7.90 – VC3V-G21: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	251
Figura 7.91– VC3V-G22: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ...	251
Figura 7.92 – VC3V-G23: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	252
Figura 7.93 – VC3V-G24: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	252
Figura 7.94 – Grupo VC3V-G2: resultados das flechas finais	253
Figura 7.95 – Grupo VC3V-G3: geometria e tipo de carregamento.....	254
Figura 7.96 – VC3V-G31: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	255
Figura 7.97 – VC3V-G32: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	256
Figura 7.98 – VC3V-G33: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	256
Figura 7.99 – VC3V-G34: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central ..	257

Figura 7.100 – Grupo VC3V-G3: resultados das flechas finais	257
Figura 7.101 – Grupo VC3V-G4: geometria e tipo de carregamento	258
Figura 7.102 – VC3V-G41: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central	259
Figura 7.103 – VC3V-G42: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central	260
Figura 7.104 – VC3V-G43: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central	260
Figura 7.105 – VC3V-G44: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central	261
Figura 7.106 – Grupo VC3V-G4: resultados das flechas.....	262
Figura 7.107 – Vigas contínuas: média das diferenças percentuais (média 1) dos modelos estudados em relação ao Analest	263
Figura 7.108 – Branson-NBR: diferença percentual - taxa de armadura	266
Figura 7.109 – Branson-Ibracon: diferença percentual - taxa de armadura.....	266
Figura 7.110 – Bilinear: diferença percentual - taxa de armadura	267
Figura 7.111 – MEV-Branson: diferença percentual - taxa de armadura.....	267
Figura 7.112 – MEV-Bilinear: diferença percentual - taxa de armadura	268
Figura 7.113 – Branson-NBR: diferença percentual - vão fissurado	269
Figura 7.114 – Branson-Ibracon: diferença percentual - vão fissurado.....	269
Figura 7.115 – Bilinear: diferença percentual – vão fissurado.....	270
Figura 7.116 – MEV-Branson: diferença percentual – vão fissurado	271
Figura 7.117 – MEV-Bilinear: diferença percentual – vão fissurado.....	271
Figura 7.118 – Comparação das médias das diferenças percentuais (média 1) das vigas de dois vãos com carga distribuída e com carga concentrada.....	274
Figura 7.120 – Média 1 das diferenças percentuais das vigas de três vãos	275

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Fator de correção η (CEB-FIP, 1990).....	48
Tabela 5.1 – Dados da seção/viga e propriedades do concreto.....	90
Tabela 5.2 – Propriedades do aço.....	90
Tabela 5.3 - Diferença percentual entre malhas do MEV-Branson	93
Tabela 5.4 – Diferença percentual entre malhas para o MEV-Bilinear	94
Tabela 5.5 – Diferença percentual entre malhas para o Analest	94
Tabela 5.6 – Carregamento e armação das vigas VB-G21:	96
Tabela 5.7 – Comparação dos resultados das flechas obtidas para as vigas do grupo VB-G21	99
Tabela 5.8 – Número de iterações de cada malha:.....	101
Tabela 5.9– Vigas VB-fck: dados do concreto NBR/CEB	102
Tabela 5.10 – VB-fck: diferença percentual das flechas finais em relação às do Analest	106
Tabela 5.11 – Vigas VB-G21: dados do concreto NBR/CEB	106
Tabela 5.12 – Dados das vigas VB-G21.....	106
Tabela 5.13 – Vigas VB-G21: diferença percentual das flechas finais em relação ao Analest	109
Tabela 6.1 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga VR.....	114
Tabela 6.2 – Propriedades do aço da viga VR.....	114
Tabela 6.3 – Propriedades do Concreto e dados da seção analisada das vigas ensaiadas por Fernandes (1996)	116
Tabela 6.4 – Propriedades do Aço das vigas ensaiadas por Fernandes (1996)	117
Tabela 6.5 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga V1B... ..	120
Tabela 6.6 – Propriedades do aço da viga V1B.....	120
Tabela 6.7 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga REF1 ..	122
Tabela 6.8 – Propriedades do aço da viga REF1	122
Tabela 6.9 – Propriedades do aço das vigas biapoiadas estudadas	124
Tabela 6.10 – Propriedades do concreto das vigas VB-fck	126
Tabela 6.11 – Dados das vigas VB-fck	127
Tabela 6.12 – Grupo VB-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração ..	128
Tabela 6.13 – Subgrupo VB-G1: carregamento e armação	129
Tabela 6.14 – Subgrupo VB-G11: avaliação da contribuição do concreto fissurado e influência de parte do vão no estádio I na rigidez da viga	133
Tabela 6.15 – Subgrupo VB-G11: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	138
Tabela 6.16 – Subgrupo VB-G12: carregamento e armação das vigas.....	139
Tabela 6.17 – Subgrupo VB-G12: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	142
Tabela 6.18 – Grupo VB-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração ..	143
Tabela 6.19 – Subgrupo VB-G21: carregamento e armação	143

Tabela 6.20 – Subgrupo VB21:avaliação da contribuição do concreto fissurado e influência de parte do vão no estágio I na rigidez da viga	148
Tabela 6.21 – Subgrupo VB-G21: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	150
Tabela 6.22 – Subgrupo VB-G22: carregamento e armação.....	151
Tabela 6.23 – Subgrupo VB-G22: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	153
Tabela 6.24 – Grupo VB-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração	154
Tabela 6.25 – Subgrupo VB-G31 carregamento e armação.....	154
Tabela 6.26 – Subgrupo VB-G31: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	156
Tabela 6.27 – Subgrupo VB-G32: carregamento e armação.....	157
Tabela 6.28 – Subgrupo VB-G32: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	159
Tabela 6.29 – Grupo VB-G4: propriedades do concreto e momento de fissuração	160
Tabela 6.30 – Subgrupo VB-G41: carregamento e armação.....	160
Tabela 6.31 – Subgrupo VB-G41: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	162
Tabela 6.32 – Subgrupo VB-G42: carregamento e armação.....	163
Tabela 6.33 – Subgrupo VB-G42: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	165
Tabela 6.34 – Grupo VB-G5: propriedades do concreto e momento de fissuração	166
Tabela 6.35 – Subgrupo VB-G51: carregamento e armação.....	166
Tabela 6.36 – Subgrupo VB-G51: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	169
Tabela 6.37 – Subgrupo VB-G52: carregamento e armação.....	170
Tabela 6.38 – Subgrupo VB-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	172
Tabela 6.39 – Diferença percentual média de flecha final para todas as vigas em relação ao Analest (%).....	173
Tabela 6.40 - Distribuição das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest dentro dos intervalos de $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$	180
Tabela 6.41 – Médias das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest das vigas submetidas a carregamento distribuído	182
Tabela 6.42 - Média das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest das vigas submetidas a carga concentrada	182

Tabela 7.1 – Dados da geometria, armação e propriedades do concreto das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)	187
Tabela 7.2 – Dados do aço das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)...	187
Tabela 7.3 – V1A-40: propriedades do concreto e dados da seção analisada	194
Tabela 7.4 – V1A-40: propriedades do aço	194
Tabela 7.5 – Grupo VC-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração ..	197
Tabela 7.6 – Subgrupo VC-G11: carregamento e armação.....	198
Tabela 7.7 – Subgrupo VC-G11: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	201

Tabela 7.8 – Subgrupo VC-G12: carregamento e armação	202
Tabela 7.9 – Subgrupo VC-G12: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	206
Tabela 7.10 – Grupo VC-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração	206
Tabela 7.11 – Grupo VC-G2: carregamento e armação	207
Tabela 7.12 – Grupo VC-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	210
Tabela 7.13 – Grupo VC-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração	210
Tabela 7.14 – Subgrupo VC-G31: carregamento e armação	211
Tabela 7.15 – Subgrupo VC-G31: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	214
Tabela 7.16 – Subgrupo VC-G32: carregamento e armação	215
Tabela 7.17 – Subgrupo VC-G32: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	218
Tabela 7.18 – Grupo VC-G4: propriedades do concreto e momento fissuração.....	219
Tabela 7.19 – Grupo VC-G4: carregamento e armação	219
Tabela 7.20 – Grupo VC-G41: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	222
Tabela 7.21 – Grupo VC-G5: propriedades do concreto e momento de fissuração	223
Tabela 7.22 – Subgrupo VC-G51: carregamento e armação	224
Tabela 7.23 – Subgrupo VC-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	227
Tabela 7.24 – Subgrupo VC-G52: carregamento e armação	228
Tabela 7.25 – Subgrupo VC-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	231
Tabela 7.26 – Grupo VC-G6: propriedades do concreto e momento de fissuração	231
Tabela 7.27 – Grupo VC-G6: carregamento e armação	232
Tabela 7.28 – Grupo VC-G6: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	235
Tabela 7.29 – Grupo VCA-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração	236
Tabela 7.30 – VCA-G1: carregamento e armação.....	236
Tabela 7.31 – Grupo VCA-G1: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	239
Tabela 7.32 – Grupo VCA-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração	240
Tabela 7.33 – Grupo VCA-G1: carregamento e armação.....	241
Tabela 7.34 – Grupo VCA-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	244
Tabela 7.35 – Grupo VC3V-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração	245
Tabela 7.36 – Grupo VC3V-G1: carregamento e armação.....	246
Tabela 7.37 – Grupo VC3V-G1: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)	249
Tabela 7.38 – Grupo VC3V-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração	250
Tabela 7.39 – Grupo VC3V-G2: carregamento e armação.....	250

Tabela 7.40 – Grupo VC3V-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	253
Tabela 7.41 – Grupo VC3V-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração	254
Tabela 7.42 – Grupo VC3V-G3: carregamento e armação	255
Tabela 7.43 – Grupo VC3V-G3: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	258
Tabela 7.44 – Grupo VC3V-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração	258
Tabela 7.45 – Grupo VC3V-G4: carregamento e armação	259
Tabela 7.46 – Grupo VC3V-G4: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%).....	262
Tabela 7.47 – Vigas contínuas: diferença percentual das flechas dos modelos estudados em relação as do modelo do Analest (%)	263
Tabela 7.48 – Distribuição das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest dentro dos intervalos de $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$	272
Tabela 7.49 Vigas de dois vãos com carga distribuída: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest	273
Tabela 7.50 – Vigas de dois vãos com carga concentrada: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest.....	273
Tabela 7.51 - Vigas de três vãos: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest	275

LISTA DE SÍMBOLOS

Romanos

A_c	área da seção transversal de concreto
A_s	área da seção transversal da armadura longitudinal de tração
A'_s	área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão
b	largura da seção transversal
B	matriz que relaciona deformação x deslocamento
d	altura útil da seção
d'	distância da face superior da seção transversal até o centro da armadura negativa
D	matriz constitutiva
E_s	módulo de elasticidade do aço
E_{cs}	módulo de elasticidade secante do concreto.
E_{ci}	módulo de elasticidade tangente inicial do concreto
(EI)	rigidez
f	vetor de forças externas
f_{ct}	resistência do concreto à tração direta
f_{ck}	resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	resistência média à compressão do concreto
$f_{ct,m}$	resistência média à tração do concreto
f_{yk}	tensão de início do escoamento do aço
f_r	módulo de ruptura/resistência à tração na flexão do concreto
f_u	resistência última do aço
h	altura da seção transversal
h_{ef}	altura efetiva da seção transversal de concreto tracionado
I_c	momento de inércia da seção bruta de concreto;
I_I	momento de inércia no estágio I
I_{II}	momento de inércia no estágio II
K	matriz de rigidez
L	comprimento do elemento
m	coeficiente da fórmula de Branson
M_a	momento fletor na seção mais solicitada do vão considerado
M_{IP}	momento de início da plastificação do aço
M_r	momento de início de fissuração do concreto
M	momento fletor
N	esforço normal

N_i	funções de interpolação
n	relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
p	carga uniformemente distribuída
P	carga concentrada
R_{st}	força resultante de tração que atua na seção transversal da viga solicitada por flexão
R_{cc}	força resultante de compressão que atua na seção transversal da viga solicitada por flexão
R	vetor de forças internas (restauradoras)
S	momento estático
Sh	parâmetro de enrijecimento na curva tensão-deformação do aço após o escoamento
t	tempo em meses
t_o	idade em meses relativa à aplicação da carga de longa duração
u	deslocamento longitudinal
u_o	deslocamento longitudinal no eixo de referência
U	vetor de deslocamentos nodais
v	deslocamento transversal
W	flecha ponderada
W_1	flecha calculada no estádio I;
W_2	flecha calculada no estádio II;
W_c	flecha calculada com $E_{cs}I_c$
x	posição da linha neutra na seção transversal ou direção longitudinal
y	direção transversal
y_t	distância do centróide da seção à fibra mais tracionada;
$(\theta)_t$	tangente

Gregos

α	parâmetro da curva do modelo de tension-stiffening
α_e	razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
α_f	coeficiente de fluência para cálculo de flecha diferida no tempo
β_1	coeficiente referente a qualidade da aderência das barras de aço
β_2	coeficiente referente a influência da duração da aplicação ou da repetição do carregamento solicitante
γ	peso específico do concreto
ε	deformação longitudinal

ε_0	deformação correspondente à tensão máxima f_{cm}
ε_c	deformação longitudinal no concreto
$\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}$	deformações principais no concreto
ε_{cr}	deformação longitudinal correspondente ao início da fissuração do concreto
ε_s	deformação longitudinal no aço
ε_u	deformação última
ε_x	deformação longitudinal na direção x
ε_y	deformação longitudinal na direção y ou deformação correspondente ao início do escoamento do aço
ζ	coeficiente de distribuição do método Bilinear
η	coordenada natural na direção y
θ	rotação
ξ	coordenada natural na direção x
ρ	taxa de armadura longitudinal de tração
ρ'	taxa de armadura longitudinal de compressão
ρ_{cm}	taxa média de armadura comprimida;
ρ_{tm}	taxa média de armadura tracionada;
σ	tensão normal
σ_c	tensão no concreto
σ_s	tensão no aço
σ_x	tensão normal na direção x
σ_y	tensão normal na direção y
φ	curvatura
Ψ	vetor de forças residuais

1 INTRODUÇÃO

O projeto das estruturas de concreto armado compreende várias etapas. Primeiramente é realizado o levantamento das ações atuantes e então o pré-dimensionamento da estrutura. A seguir, é feita uma análise estrutural para se obter os esforços e deslocamentos da estrutura. Com os resultados obtidos, verifica-se a segurança dos elementos estruturais no Estado Limite Último (ELU) e, após, verificam-se os limites de abertura de fissuras e deformações dos elementos estruturais no Estado Limite de Serviço (ELS). Não sendo atendidas as verificações do ELU ou do ELS, parte-se para um redimensionamento da estrutura e repete-se a análise e as verificações até a estrutura atender tanto ao ELU quanto ao ELS.

Há algumas décadas atrás, a preocupação com os estados limites de serviço era secundária, visto que as estruturas de concreto armado eram, em geral, mais robustas e, portanto, deformavam menos. No entanto, estruturas cada vez mais esbeltas vêm sendo projetadas, tanto devido ao emprego de concretos mais resistentes e de um controle mais rigoroso na execução das estruturas, como também devido ao desenvolvimento de modelos de análise estrutural e de programas e recursos computacionais. Todo este desenvolvimento tem permitido aos engenheiros projetar estruturas mais esbeltas, as quais são suscetíveis a maiores deformações. Portanto, a preocupação dos engenheiros com as deformações das estruturas têm aumentado, e diante disso, maior precisão vem sendo exigida dos métodos utilizados para a previsão das deformações dos elementos estruturais na fase de projeto.

O controle de deformações em uma estrutura é necessário não só pelos problemas estruturais que deformações excessivas podem causar, como problemas de instabilidade e fissuração, mas também, pelas deformações provocarem danos aos elementos não estruturais e também causar desconforto aos usuários quando estas forem visíveis, comprometendo assim as condições de serviço da estrutura.

O principal problema dentro dos estados limites de serviço são as deformações excessivas, que são verificadas pela comparação dos valores máximos de deslocamentos verticais (flechas) e rotações dos elementos estruturais com valores limites estabelecidos em normatização referente ao assunto, que no caso do Brasil é a NBR 6118/2007 para estruturas de concreto.

O cálculo das flechas em elementos de concreto armado, como as vigas, é influenciado por diversos aspectos e necessita da definição de vários parâmetros para a sua determinação. Um dos parâmetros que apresenta maior grau de dificuldade em se determinar é a contribuição

do concreto fissurado na rigidez da peça, conhecido como efeito “tension-stiffening”. Outros fatores importantes e de difícil determinação são os efeitos de variação ao longo do tempo, como a retração e a fluência do concreto. A flecha total em uma viga pode então ser dividida em duas parcelas, a flecha imediata, onde entra na sua determinação a contribuição do efeito “tension-stiffening”, e a flecha diferida no tempo, que é devida principalmente aos efeitos de fluência e retração do concreto.

A fissuração do concreto sob tração leva à alteração da rigidez da peça, que passa a ter comportamento não linear. Para a consideração da não linearidade física do material na determinação da flecha imediata, é necessário realizar uma análise não linear, que é mais complexa e demanda mais recursos computacionais do que uma análise linear. Para o dimensionamento de estruturas usuais de concreto armado no ELU, uma análise linear é adequada para obtenção dos esforços nos elementos e fornece ótimos resultados. Já para a verificação das deformações, é necessário ser considerada a não linearidade física, caso o concreto tracionado da peça tenha fissurado sob o carregamento de serviço. Para isso, existem vários modelos de cálculo, que podem ser modelos refinados como, por exemplo, os que utilizam elementos finitos e modelos constitutivos mais refinados, ou métodos simplificados, como os adotados em normas de estruturas de concreto armado para a previsão das flechas de vigas.

Vários modelos mais refinados já foram propostos, sempre buscando representar de maneira mais precisa o comportamento real das peças de concreto armado. Porém, sabe-se que a flecha real em um elemento estrutural envolve vários parâmetros, depende do processo construtivo, das propriedades dos materiais, da carga solicitante que pode ter valor real diferente do previsto em projeto, conferindo ao cálculo de flechas de vigas em projeto caráter estimativo, não podendo se esperar, portanto, alcançar exatidão pelos diferentes métodos utilizados.

Para o cálculo das flechas de vigas de concreto armado existem, como já mencionado, alguns métodos simplificados que dispensam a realização de uma análise não linear mais complexa. Estes métodos, propostos por diferentes autores e fontes, consideram de forma simplificada o efeito da fissuração na resistência da peça de concreto armado (flecha imediata) e também os efeitos do tempo, como retração e fluência (flecha diferida no tempo), podendo ser utilizados de maneira rápida por cálculo manual ou exigindo poucos recursos computacionais.

1.1 Justificativa

Diante da importância de se obter valores de deformações na fase de projeto mais próximos das deformações que ocorrem na estrutura real, e tendo em vista a disponibilização de modelos mais refinados, que buscam representar com maior rigor a não linearidade do concreto, de tal forma a aproximar melhor o comportamento esperado na estrutura real, e também de recursos computacionais que vêm possibilitar a utilização destes modelos por projetistas, surge o questionamento quanto ao emprego dos métodos simplificados, se estes fornecem resultados satisfatórios comparados com os modelos mais refinados justificando ainda o seu emprego.

O grande número de fatores que influenciam no cálculo da flecha em vigas já gera uma inevitável variação na previsão destes valores, mas o uso de métodos racionais, que busquem aproximar melhor o comportamento estrutural, pode reduzir significativamente a variação dos resultados encontrados, sendo então fundamental utilizar métodos que forneçam resultados de confiabilidade comprovada.

Alguns estudos que buscam comparar os resultados obtidos pelos diferentes métodos simplificados disponíveis, com modelos mais refinados e resultados experimentais já foram realizados. A maioria, porém, com enfoque em vigas biapoiadas. Falta ainda um estudo mais abrangente para vigas contínuas que englobe os diferentes métodos simplificados disponíveis, e que verifique a precisão destes métodos, comparando os resultados obtidos com resultados experimentais ou com resultados de modelo não linear que já tenham sido validados em comparação com resultados experimentais.

O comportamento das vigas contínuas se diferencia das biapoiadas pela presença de momento negativo nos apoios, o que em geral acarreta numa maior extensão do vão fissurado. Portanto, é interessante analisar separadamente os resultados das vigas contínuas dos resultados das vigas biapoiadas fornecidos pelos diferentes métodos.

Foram analisados neste trabalho somente métodos e modelos para cálculo de flecha imediata, por entender-se que é o primeiro passo para uma verificação completa dos métodos simplificados disponíveis para cálculo da flecha total, podendo assim, verificar separadamente a precisão das parcelas de flecha imediata e flecha diferida no tempo.

Com esse estudo, pretende-se fornecer orientação aos engenheiros projetistas quanto ao uso dos métodos simplificados e modelos estudados, a precisão que eles fornecem, os casos em que apresentam melhores resultados, diferenciando os resultados de vigas

biapoiadas de vigas contínuas. Além disso, esse estudo virá facilitar e disponibilizar aos engenheiros ferramentas e programas computacionais tanto para o uso de modelo mais refinado de elementos finitos como de métodos mais simplificados para a análise de esforços e deformações de vigas em serviço.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo central realizar um estudo sobre o cálculo de flechas imediatas em vigas de concreto armado sob cargas de serviço (vigas de projeto), com enfoque em vigas contínuas, por meio da comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos simplificados recomendados por diferentes fontes, com modelos de elementos finitos de barra, que consideram a não linearidade física dos materiais por meio de modelos constitutivos baseados na relação tensão-deformação, e modelos de vigas baseados em diagramas momento-curvatura. Deve-se verificar, primeiramente, a precisão dos resultados dos modelos de elementos finitos e dos métodos simplificados em comparação com resultados experimentais de vigas disponíveis na literatura.

Dentro do objetivo geral, podem-se citar os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um programa computacional com a implementação dos métodos simplificados e do modelo de elementos finitos de viga a serem estudados;
- Avaliar o modelo não linear de elementos finitos de pórtico plano, já desenvolvido e implementado no programa ANALEST, e também dos demais métodos estudados, por meio da comparação de resultados de flecha imediata obtidas pelos modelos com resultados experimentais disponíveis de vigas contínuas e biapoiadas;
- Realizar comparação das flechas imediatas de vigas biapoiadas e contínuas sob cargas de serviço obtidas pelos métodos simplificados e os modelos de elementos finitos de barras, variando a geometria, carregamento e taxa de armadura longitudinal dos exemplos, estudando um maior número de vigas contínuas;
- Realizar análise dos resultados obtidos, diferenciando os resultados das vigas biapoiadas das vigas contínuas, extraindo algumas recomendações quanto ao uso dos diferentes métodos.

1.3 Organização dos capítulos

O próximo capítulo contém uma revisão bibliográfica sobre deformação de vigas de concreto armado, apresentando os principais conceitos sobre o assunto e os métodos simplificados para cálculo de flecha imediata a serem estudados.

No Capítulo 3, detalha-se o modelo de elementos finitos de pórtico plano e o modelo de elementos de viga usados nos estudos, e no seguinte apresenta-se o programa computacional desenvolvido. No capítulo 5 são apresentados os estudos paramétricos realizados. Nos capítulos 6 e 7 estão apresentados os resultados dos estudos de cálculo de flecha imediata para vigas biapoiadas e contínuas respectivamente, utilizando-se os diversos métodos simplificados e modelos refinados. Algumas conclusões e recomendações são extraídas no capítulo 8.

2 DEFORMAÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

No primeiro item deste capítulo explica-se o comportamento das peças de concreto armado submetidas à flexão/tração. Logo após são apresentados os principais métodos simplificados usados para o cálculo de flecha de vigas com ênfase no cálculo de flecha imediata.

2.1 Comportamento e estádios

Em uma viga submetida à flexão ou a esforço normal de tração, com carga crescente até a sua ruptura, podem-se observar três estádios de comportamento da peça. Como descreve Leonhardt (1978), no Estádio I, quando a carga aplicada na viga é pequena, não surgem fissuras na viga enquanto a tensão normal de tração à seção, devido à flexão, for inferior à resistência à tração do concreto. O diagrama de tensões ao longo da seção é linear, e a relação tensão/deformação é considerada linear.

Quando a resistência do concreto à tração é alcançada, surgem as primeiras fissuras no trecho solicitado, a viga inicia então o Estádio II de comportamento.

Como explica Ghali (2002), admite-se que a tensão de tração no local da fissura é resistida completamente pela armadura. Já numa seção situada entre duas fissuras, a aderência existente entre o concreto e a barra de aço restringe a deformação do aço e assim uma parte da força de tração na barra de aço em uma fissura é transmitida para o concreto situado entre fissuras. Logo, a tensão e a deformação na seção caracterizam um caso intermediário entre os estádios I e II, devendo ser considerado um valor médio ou efetivo da rigidez entre estes dois estádios para o cálculo das deformações quando o elemento estiver submetido a uma solicitação que ultrapassa a resistência à tração do concreto.

A contribuição do concreto na zona de tração entre fissuras para a rigidez da peça é chamada de efeito “tension-stiffening”. Calcular vigas desprezando este efeito, ou seja, estágio II puro sem consideração da resistência do concreto tracionado, geralmente resulta em superestimação do valor de deslocamento calculado. Um fator que influencia na contribuição do concreto fissurado à rigidez da peça é a qualidade da aderência da barra de aço.

Na figura 2.1, está exemplificada a contribuição do concreto entre fissuras na rigidez de uma viga biapoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. O gráfico mostra a relação $q \times D$, onde q é a

carga distribuída, e D é a flecha instantânea no meio do vão, D_1 é a flecha no estágio I e D_2 é a flecha no estágio II puro, em que todo o vão está fissurado. A área hachurada entre D e D_2 representa a soma de dois efeitos: a rigidez devido à parte não fissurada da viga, que ainda se encontra no estágio I de comportamento, e ao efeito de “tension-stiffening” na rigidez da parte fissurada da viga.

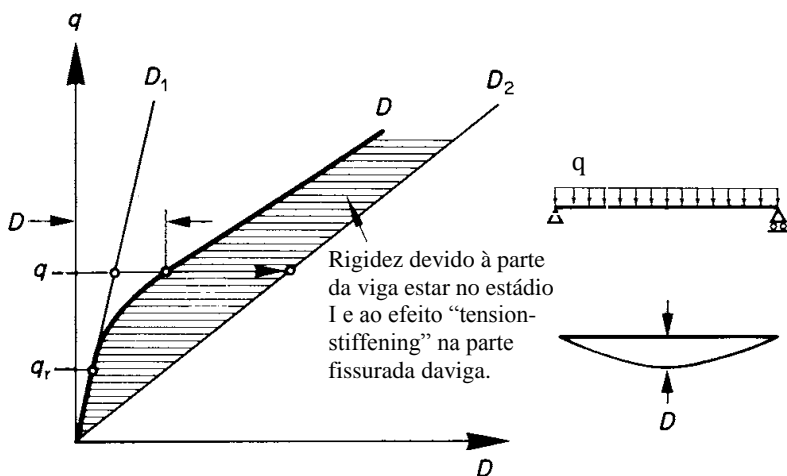


Figura 2.1 – Intensidade do carregamento versus flecha instantânea no meio do vão de uma viga biapoiada (GHALI, 2002).

As vigas pouco armadas, conforme coloca Araújo (2004), são muito dependentes da colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Já nas vigas com taxas de armadura elevadas, o efeito “tension-stiffening” influencia menos na rigidez após a fissuração, apresentando assim menor ganho de rigidez comparada com uma viga com taxa de armadura baixa.

Há ainda o Estádio III, caracterizado pela plastificação do concreto ou do aço, ou ambos, em que a peça encontra-se bastante fissurada. Neste estágio, se a peça é descarregada surgem deformações residuais. Para as peças dimensionadas no domínio 2 e 3, o início do estágio III caracteriza-se pelo início do escoamento do aço que ocorre ao se atingir o momento de plastificação (M_{IP}).

2.1.1 Momento de fissuração e momento de inércia no estágio I e II

A transição do Estádio I para o Estádio II acontece quando a resistência do concreto à tração é atingida, e em uma viga submetida à flexão é caracterizado pelo momento de fissuração M_r . O cálculo de M_r segundo a NBR 6118/2007 é feito de acordo com a expressão a seguir:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (2.1)$$

onde:

I_c = momento de inércia da seção bruta de concreto;

y_t = distância do centróide da seção à fibra mais tracionada;

f_{ct} = resistência à tração direta do concreto, sendo que, na falta de ensaios para determinação deste valor, pode ser adotada a seguinte equação para verificação de estado limite de deformação excessiva:

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (2.2)$$

sendo f_{ck} a resistência característica do concreto em MPa e $f_{ct,m}$ a resistência média à tração do concreto (em MPa).

O coeficiente α , correlaciona de maneira aproximada a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta:

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares.

Para o cálculo da inércia no estágio I, a NBR 6118/2007 determina considerar somente a seção bruta de concreto, mas a armadura pode ser computada no cálculo da inércia, que é computada fazendo-se a homogeneização da seção, levando a um resultado mais preciso, embora com diferença quase desprezível.

Leonhardt (1971) coloca que para seções com taxas de armaduras elevadas recomenda-se adotar a seção homogeneizada, e no caso de taxas de armadura menores que 0,5% para peças fletidas, pode-se considerar apenas a seção de concreto. Segundo o autor, a armadura de compressão pode ser desprezada para taxas menores que 0,4%, sendo importante para a deformação lenta no caso de taxas maiores.

Para considerar a armadura no cálculo da inércia, faz-se a homogeneização da seção, transformando a área de aço em área equivalente de concreto utilizando a relação entre os módulos de elasticidade $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$ onde E_s é o módulo de elasticidade do aço e E_{cs} é módulo de elasticidade secante do concreto.

Para seções com apenas uma camada de armadura de tração e uma de compressão (ver Figura 2.2), o momento de inércia no Estádio I, em relação ao eixo que passa pelo centróide G , fazendo a

homogeneização da seção considerando as duas camadas de armadura, pode ser calculado pela expressão a seguir.

$$I_I = x^2 [bh + (A'_s + A_s)(\alpha_e - 1)] - x [bh^2 + 2(A'_s d' + A_s d)(\alpha_e - 1)] + (A'_s d'^2 + A_s d^2)(\alpha_e - 1) + \frac{bh^3}{12} \quad (2.3)$$

onde x é a posição da linha neutra calculada considerando a seção homogeneizada:

$$x = \frac{bh^2 + 2(A'_s d' + A_s d)(\alpha_e - 1)}{2(bh + (A'_s + A_s)(\alpha_e - 1))} \quad (2.4)$$

A transformação da seção e os parâmetros envolvidos no cálculo estão ilustrados a seguir.

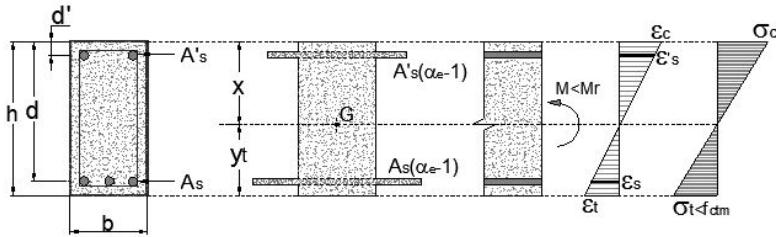


Figura 2.2 – Seção transversal no Estádio I.

Para o cálculo do momento de inércia no Estádio II em relação à linha neutra, é importante conhecer a posição da linha neutra na seção, já que o concreto tracionado é desprezado. A homogeneização é feita da mesma forma, transformando a área de aço em área equivalente de concreto utilizando a relação entre os módulos de elasticidade α_e .

$$I_{II} = x^2 [A_s \alpha_e + A'_s (\alpha_e - 1)] + x [-2A'_s d' (\alpha_e - 1) - 2A_s d \alpha_e] + A'_s d'^2 (\alpha_e - 1) + A_s d^2 \alpha_e + \frac{bx^3}{3} \quad (2.5)$$

$$x = \frac{-A'_s (\alpha_e - 1) - A_s \alpha_e + \sqrt{[A'_s (\alpha_e - 1) + A_s \alpha_e]^2 + 2b[A'_s d' (\alpha_e - 1) + A_s d \alpha_e]}}{b} \quad (2.6)$$

Na figura 2.3 está ilustrada a seção transformada no Estádio II.

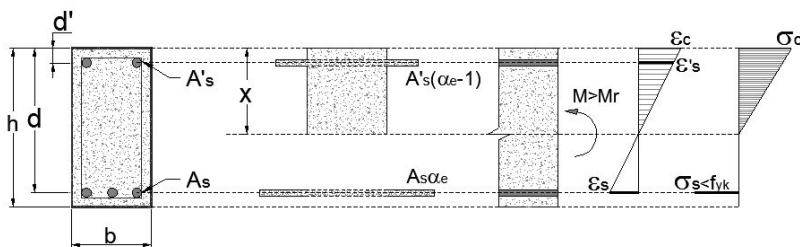


Figura 2.3 – Seção transversal no Estádio II.

2.1.2 Momento do Início da Plastificação

O momento do início da plastificação da seção (M_{IP}), caracterizado pelo início do escoamento do aço é calculado pelo equilíbrio de forças atuantes na seção, considerando Estádio II puro e distribuição triangular de tensões para o concreto comprimido (material elástico-linear) conforme figura a seguir.

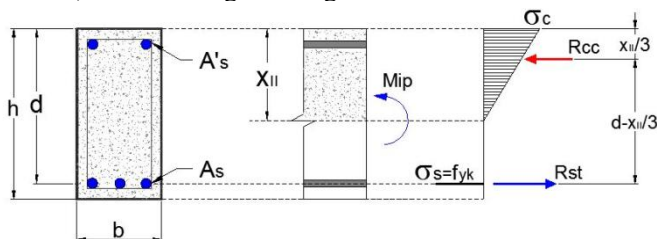


Figura 2.4 – Seção transversal no estágio II com forças resultantes.

O momento de início da plastificação é calculado pela equação a seguir onde f_{yk} é a tensão do início do escoamento do aço.

$$M_{IP} = R_{st} \cdot \left(d - \frac{x_{II}}{3}\right) = A_s \cdot f_{yk} \cdot \left(d - \frac{x_{II}}{3}\right) \quad (2.7)$$

2.2 Métodos simplificados para cálculo de flecha em vigas de concreto armado

Para calcular a flecha de vigas de concreto armado, existem alguns métodos simplificados disponíveis na literatura para se levar em consideração o efeito “tension-steffining” e, também, os efeitos de longo prazo, como fluência e retração do concreto.

Em relação ao efeito “tension-steffining”, a maioria dos métodos aproximados representa a variação da rigidez à flexão ao longo

da viga de forma simplificada para ser possível um cálculo manual. Alguns adotam um único valor calculado em uma seção de referência para todo um vão; já outros recomendam considerar mais de um segmento para o cálculo de uma rigidez média, principalmente no caso de vigas contínuas onde há, além da atuação de momento fletor positivo, momentos fletos negativos nos apoios.

Para o cálculo de flecha imediata com consideração da colaboração da resistência do concreto fissurado, o método mais conhecido e empregado por algumas normas é a fórmula de Branson ou inércia equivalente, que está descrita no próximo item.

2.2.1 Fórmula de Branson

O método simplificado proposto por Branson (1963) adota uma fórmula de inércia equivalente onde a inércia é ponderada entre o estágio I e estágio II puro (I_I e I_{II}). O American Concrete Institute (ACI Committee 435, 1966) foi a primeira norma a adotar esta fórmula para cálculo simplificado de flecha imediata, sendo ainda recomendada atualmente (ACI 318-2005), a norma brasileira a adotou posteriormente na sua última versão NBR 6118/2007. A seguir está descrito o método simplificado conforme a NBR 6118/2007, a sua aplicação conforme uma publicação do Ibracon sobre comentários técnicos da NB-1, e ainda segundo o ACI.

Fórmula de Branson conforme NBR 6118/2007

A versão anterior desta norma, a NBR 6118/1978, recomendava utilizar a inércia do estágio II puro para o cálculo de flechas de elementos lineares, o que, como visto anteriormente (Figura 2.1) pode levar a resultados superestimados, já que se desconsidera a contribuição do concreto fissurado para a rigidez da peça. A NBR 6118 em sua versão de 2003 passou a adotar para o cálculo aproximado da flecha imediata em vigas a fórmula de Branson, onde se utiliza a expressão de rigidez equivalente (EI_{eq}) para representar o concreto entre os estádios I e II:

$$EI_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^m I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^m \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (2.8)$$

onde:

I_c = momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{II} = momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculada com $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$;

E_{cs} = módulo de elasticidade secante do concreto, que pode ser obtido a partir do módulo tangente inicial:

$$E_{cs} = 0,85E_{ci} \quad (2.9)$$

sendo E_{ci} = módulo de elasticidade tangente inicial; quando não forem feitos ensaios para estimar o valor, pode ser adotado (f_{ck} em MPa):

$$E_{ci} = 5600f_{ck}^{1/2} \quad (2.10)$$

E_s = módulo de elasticidade do aço de armadura passiva que pode ser admitido igual a 210 GPa na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante.

M_a = momento fletor na seção crítica do vão considerado, momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços;

M_r = momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas.

$m = 3$

Adota-se para o expoente m o valor igual a 3 para cálculo da I_{eq} utilizando uma seção de referência para todo o seu vão, e igual a 4 para o cálculo de uma seção individual, conforme indicam Sabnis et al (1973).

Dessa forma, quando se adota um valor de I_{eq} para todo o vão e $m=3$, está se considerando a soma dos efeitos “tension stiffening” na parte fissurada do vão e de que parte do vão ainda está no estágio I na rigidez da viga. Quando se calcula I_{eq} para uma seção individual, adotando-se assim $m=4$, está sendo desconsiderado o efeito de que parte do elemento está no estágio I.

Para momento fletor atuante M_a menor que M_r , ou seja, seção no estágio I, a rigidez equivalente adotada é a rigidez da seção bruta $E_{cs}I_c$.

A NBR 6118 recomenda para o cálculo de forma aproximada da flecha diferida no tempo devido à fluência do concreto a multiplicação do coeficiente α_f pela flecha imediata.

$$\alpha_f = \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{1 + 50\rho'} \quad (2.11)$$

onde:

ξ = coeficiente em função do tempo que pode ser calculado pelas expressões:

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (2.12)$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (2.13)$$

t = tempo em meses

t_0 = idade em meses relativa à aplicação da carga de longa duração

Fórmula de Branson conforme Comentários da NB-1

Os comentários técnicos da NB-1, publicados pelo IBRACON, baseados em Sabnis et al (1973), sugerem para a aplicação da fórmula de Branson em vãos de vigas contínuas, quando se desejar maior precisão, adotar um valor ponderado da rigidez equivalente, conforme é mostrado a seguir:

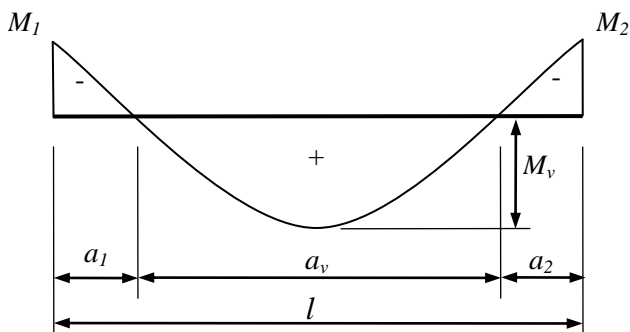


Figura 2.5 – Ponderação da rigidez equivalente para vão de viga contínua.

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{l} [(EI)_{eq,1} \cdot a_1 + (EI)_{eq,v} \cdot a_v + (EI)_{eq,2} \cdot a_2] \quad (2.14)$$

onde:

$(EI)_{eq,1}$ = rigidez à flexão equivalente no trecho 1;

$(EI)_{eq,v}$ = rigidez à flexão equivalente no trecho de momentos positivos;

$(EI)_{eq,2}$ = rigidez à flexão equivalente no trecho 2.

Em cada trecho a rigidez à flexão equivalente deve ser calculada com EI_{II} considerando as armaduras existentes da seção mais solicitada de cada trecho e com M_d igual à M_1 , M_v e M_2 respectivamente.

Pode-se adotar a_1/l e a_2/l aproximadamente iguais a 0,15.

Este procedimento para se obter uma rigidez média do vão, não considerando apenas uma seção, é também indicado pelo ACI 318/2005.

Fórmula de Branson conforme ACI

O American Concrete Institute ACI 318/2005 adota a fórmula da inércia equivalente, diferenciando da NBR 6118 apenas na obtenção de alguns parâmetros.

Para o momento de fissuração:

$$M_r = \frac{f_r \cdot I_c}{y_t} \quad (2.15)$$

onde f_r é o módulo de ruptura (resistência à tração na flexão) do concreto dado por (com f_{ck} em MPa):

$$f_r = 0,623 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.16)$$

O módulo de elasticidade secante do concreto também é calculado de outra forma:

$$E_{cs} = 0,432(\gamma)^{1,5} \sqrt{f_{ck}} \quad (2.17)$$

onde γ é o peso específico do concreto em kg/m³ e f_{ck} a resistência característica do concreto à compressão em MPa.

2.2.2 Método Bilinear

O método bilinear é descrito pelo CEB “Design Manual on Cracking and Deformations” (1985). Neste método a flecha é estimada por um valor intermediário entre o valor da flecha calculada com rigidez no estágio I e a flecha calculada com rigidez do estágio II puro, utilizando o coeficiente de distribuição ζ para fazer a interpolação e assim considerar a colaboração do concreto entre fissuras. Esta fórmula é também utilizada para se obter uma curvatura média e então obter-se a deformação.

$$W = (1 - \zeta)W_1 + \zeta W_2 \quad (2.18)$$

onde:

W_1 = flecha calculada no estágio I;

W_2 = flecha calculada no estágio II;

para $M_a < M_r$:

$$\zeta = 0 \quad (2.19)$$

para $M_a > M_r$:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \frac{M_r}{M_a} \quad (2.20)$$

sendo β_1 o coeficiente que caracteriza a qualidade da aderência das barras de aço e β_2 o coeficiente que representa a influência da duração da aplicação ou da repetição do carregamento solicitante:

$$\beta_1 = \frac{1}{2,5k_1}$$

$k_1 = 0,4$ para barras de alta aderência

$k_1 = 0,8$ para barras lisas

$\beta_2 = 1$ para primeiro carregamento

$\beta_2 = 0,5$ para cargas de longa duração ou grande número de ciclos de carga.

Na maioria das aplicações práticas $\beta = \beta_1\beta_2 = 0,5$

M_a = momento atuante na seção crítica

M_r = momento de fissuração na seção crítica (considerando a armadura no cálculo de I_I):

$$M_r = \frac{f_{ct}I_I}{y_t} \quad (2.21)$$

$$f_{ct} = f_{ctm} = 1,40 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (2.22)$$

sendo f_{ct} a resistência do concreto à tração, com f_{ct} e f_{ck} em MPa.

Pode-se observar que o coeficiente ζ varia ao longo do eixo da viga devido à variação tanto de M_a , quanto de M_r (este último devido à variação da armadura), logo é preciso, na prática, adotar um valor constante para ζ , calculado para uma seção crítica. Para vigas biapoiadas e vigas contínuas, adota-se a seção mais solicitada que pode ser a seção do meio do vão, e para balanços adota-se a extremidade engastada. Assim, os momentos de inércias I_I e I_{II} , utilizados no cálculo das flechas W_1 e W_2 , são calculados com a armadura da seção crítica, sendo desprezado o efeito da variação da armadura ao longo da viga.

O valor adotado para β segundo o CEB-FIP/1990 é 0,8 para barras de alta aderência e primeiro carregamento, já o Eurocode 2 (1992) utiliza $\beta = 1$. O CEB-FIP Structural Concrete (1999) demonstra, por meio dos resultados carga versus flecha calculados para uma viga exemplo, que a diferença entre os coeficientes é quase nula.

Adotando $\beta = 1$ e supondo como exemplo que o momento M_r de uma viga biapoiada é a metade do momento M_a atuante, tem-se então, pela equação 2.20 que:

$$\zeta = 1 - \beta \frac{M_r}{M_a} = 1 - \frac{M_r}{M_a} = 1 - \frac{M_a}{2M_a} = 0,5 \quad (2.23)$$

Supondo que a viga exemplo esteja solicitada por uma carga concentrada no meio do vão, tem-se então que metade do comprimento do vão está solicitado por um momento fletor maior que M_r (estádio II) e a outra metade está no estágio I de comportamento, logo, a flecha ponderada para este exemplo pela equação 2.18 será:

$$W = (1 - \zeta)W_1 + \zeta W_2 = 0,5W_1 + 0,5W_2 \quad (2.24)$$

Ou seja, uma interpolação linear dos valores das flechas calculadas considerando toda a viga no estágio I, e toda a viga no estágio II, levando em conta assim a contribuição do concreto fissurado na

rigidez da peça e a rigidez da parte do vão não fissurado, que ainda se encontra no estágio I.

2.2.3 Método CEB-FIP Model Code 1990

O método simplificado de cálculo de flecha adotado pelo CEB, também chamado de método dos coeficientes globais (GHALI, 2002), foi desenvolvido baseado no método bilinear, para a flecha ser estimada de forma simples e prática, levando em consideração o efeito da fluência. A fórmula foi adaptada para seções transversais retangulares e parte inicialmente da flecha de cálculo linear considerando a rigidez $E_{cs}I_c$, onde E_{cs} é o módulo secante do concreto e I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto (estádio I e sem consideração da armadura). Segundo o método, as flechas de longo período podem ser avaliadas por uma relação bilinear entre carga e deflexão:

para $M_a < M_r$:

$$W = (1 + \emptyset)W_c \quad (2.25)$$

para $M_a > M_r$:

$$W = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \eta(1 - 20\rho_{cm})W_c \quad (2.26)$$

onde:

W_c = deflexão elástica calculada com $E_{cs}I_c$;

M_a = momento fletor da seção mais solicitada;

h = altura da seção transversal da viga;

d = altura útil da seção;

ρ_{cm} = taxa média de armadura comprimida;

ρ_{tm} = taxa média de armadura tracionada;

\emptyset = coeficiente de fluência;

onde $\rho = \frac{A_s}{bd}$ e ρ_m pode ser determinado de acordo com o diagrama de momento fletor para as vigas contínuas mostrado na figura 2.6.

$$\rho_m = \rho_a \frac{l_a}{l} + \rho \frac{l_o}{l} + \rho_b \frac{l_b}{l} \quad (2.27)$$

ρ_a, ρ_b são as taxas de armadura tracionada/comprimida nos apoios à direita e à esquerda da viga, respectivamente;

ρ é a taxa de armadura na seção M_{max} (momento máximo);

l_a, l_b são comprimentos estimados;

e η é o fator de correção que inclui os efeitos de fluência e retração de acordo com a taxa de armadura tracionada, ρ_{tm} , dada pela tabela 2.1

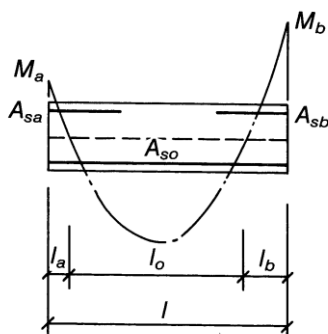


Figura 2.6 – Definição de l_a , l_b , l_o pelo diagrama de momento fletor (CEB-FIP, 1990)

Tabela 2.1 – Fator de correção η (CEB-FIP, 1990)

$\rho_m(\%)$	0.15	0.2	0.3	0.5	0.75	1.0	1.5
η	10	8	6	4	3	2.5	2

2.2.4 Métodos simplificados selecionados

Os métodos simplificados para cálculo de flecha imediata selecionados para o estudo nesse trabalho são:

- Fórmula de Branson conforme NBR 6118/2007 (Branson-NBR 6118);
- Método de Branson conforme comentários NB-1, publicados pelo Ibracon para vigas contínuas (Branson-Ibracon);
- Método Bilinear (Bilinear);

O método utilizado pelo ACI é o mesmo utilizado pela NBR 6118/2007, ambas as normas utilizam a fórmula de inércia equivalente de Branson (1963), diferenciando somente na obtenção de alguns parâmetros; por este motivo, é estudado somente o método utilizando os parâmetros da norma brasileira.

O método simplificado para cálculo de flecha descrito no CEB-FIP (1990) não é estudado aqui por incorporar em sua fórmula o efeito da fluência, visto que o objetivo do estudo é somente a parcela de flecha imediata.

Descrevem-se, a seguir, algumas considerações sobre cada método.

Branson - NBR 6118

Seguem-se as prescrições recomendadas pela norma, calculando uma rigidez equivalente EI_{eq} para cada vão, tomando-se uma seção de referência, no caso, a seção mais solicitada no vão que, para as vigas contínuas geralmente é a seção do apoio intermediário (momento máximo negativo), dependendo do carregamento. Os parâmetros são calculados conforme definições da norma. É calculada somente a parcela da flecha imediata, não sendo adicionada a parcela referente ao efeito de fluência, devido ao limite do escopo deste trabalho.

Branson - Ibracon

A recomendação para aplicação da fórmula de Branson contida nos comentários da NB-1, publicadas pelo Ibracon, para o cálculo da flecha imediata de vigas contínuas é também estudada, considerando até 3 seções de referência em um vão, quando houver alternância de trechos com momento negativo e outros com momento positivo, calculando-se a inércia equivalente para um vão pela ponderação das inércias equivalentes dos trechos, calculadas para cada seção crítica de cada trecho.

Método Bilinear

Para o cálculo deste método, todos os parâmetros utilizados, tais como propriedades do concreto e momento de fissuração, serão adotados seguindo as recomendações da NBR 6118/2007, para unificar as propriedades utilizadas nos diferentes métodos e possibilitar a comparação entre os métodos, principalmente no caso de vigas com propriedades do concreto e aço obtidos experimentalmente, em que os dados fornecidos devem ser os mesmos para os diferentes métodos e modelos.

Porém, o método Bilinear foi desenvolvido para ser utilizado com os parâmetros calculados conforme recomendações do CEB, logo, para verificar as diferenças dos resultados obtidos calculando-se vigas usando-se parâmetros conforme a NBR-6118, foi realizado um estudo paramétrico que está descrito no Capítulo 5.

Os diferentes métodos simplificados e o método de elementos de vigas descrito no capítulo seguinte foram implementados em um programa computacional, denominado AVSer, que está descrito no capítulo 4.

2.3 Estudos realizados sobre os métodos simplificados

As simplificações adotadas nos métodos práticos para o cálculo de flecha em vigas, sempre foram motivo de questionamento sobre os resultados obtidos, se estão dentro de uma precisão aceitável quando comparados com resultados experimentais. Por este motivo, estudos vêm sendo realizados para verificar a acurácia destes métodos, principalmente os adotados por normas referentes ao assunto.

Branson (1968) mostra o resultado de um estudo estatístico onde foram ensaiadas 107 vigas para obtenção da flecha imediata e 30 vigas para obtenção de flecha de longa duração. Os resultados experimentais são comparados com valores teóricos calculados com a fórmula da inércia equivalente (para flecha imediata) e apresentados de forma compacta, por uma média da razão da flecha experimental pela flecha calculada. Para as flechas imediatas das vigas sem armadura de compressão a taxa média foi de 1,01 e para as vigas com armadura superior foi de 1,04. O intervalo de variação das taxas foi de 0,86 a 1,17 e 0,78 a 1,31 para vigas sem armadura de compressão e com armadura de compressão respectivamente, intervalos considerando 80% dos casos. Simplificando os resultados, a variação do método em relação ao resultado experimental ficou em torno de $\pm 20\%$.

O método simplificado do ACI (fórmula de Branson) foi analisado e criticado por Ghali (1993). O autor demonstrou em seu estudo que o uso da fórmula de Branson pode em alguns casos ter certa precisão, e em outros, levar a uma grande margem de erro na previsão de flechas, como quando a taxa de armadura da viga é baixa ou a relação M_d/M_{cr} é perto de 1, e também quando o momento fletor atuante é constante ao longo da maior parte do comprimento da viga. O erro no uso desta fórmula vem de atribuir uma rigidez constante para a seção transversal ao longo de toda a viga, que na verdade é variável, o autor afirma também que a magnitude do erro depende do formato do diagrama de momento fletor. Sugere para melhores resultados o uso de uma curvatura média, obtida por interpolação entre a curvatura no estádio 1 e a no estádio 2, como o método bilinear do CEB-FIP(1985).

Em outro estudo, o mesmo autor Ghali (1999) recomenda um modelo baseado nas exigências de equilíbrio e compatibilidade para melhor prever a flecha imediata e de longo prazo de vigas de concreto armado (com ou sem protensão). As flechas calculadas pelo modelo, e também as obtidas pelo método simplificado do ACI 318/2005, são comparadas com resultados experimentais obtidos por diferentes autores. As vigas estudadas são todas biapoiadas e submetidas a carregamento

uniformemente distribuído. Na comparação das flechas imediatas para o primeiro grupo de vigas, o erro médio em relação à flecha experimental foi de 8% e 15% para o modelo recomendado e para o método do ACI, respectivamente; já num segundo grupo de vigas ensaiadas por outro autor, a taxa média do erro foi de 5% e 7% para o modelo recomendado e o método do ACI, respectivamente.

Araújo (2004) realizou um trabalho para verificar a precisão de alguns métodos simplificados para o cálculo de flechas em vigas de concreto armado e comparou os resultados aos de um modelo não linear. Os métodos analisados foram o método bilinear do CEB, o método prático apresentado no código modelo CEB-FIP/90 e o método do ACI, que também é adotado pela NBR-6118. O modelo não linear é baseado no método dos elementos finitos, utilizando para a análise elemento de barra de pórtico plano. Os efeitos de fluência e retração são considerados no cálculo das flechas. O estudo foi realizado em vigas com mesma geometria, mas com armadura de tração diferente, sendo as vigas submetidas a uma combinação de serviço com carga uniformemente distribuída. Os resultados indicaram concordância entre os métodos simplificados com o modelo não linear para o cálculo das flechas iniciais, mas, para as flechas diferidas no tempo, o método da NBR 6118 não apresentou bons resultados, subestimando as flechas das vigas pouco solicitadas e superestimando a flecha das vigas mais solicitadas que estão num grau de fissuração maior.

Matsui (2006) desenvolveu um modelo para o cálculo de flechas de vigas de concreto armado submetidas a cargas de curta duração, considerando a não linearidade física do material. Os resultados obtidos com o modelo desenvolvido foram comparados com resultados experimentais, com o modelo simplificado da NBR 6118 e com cálculo elástico-linear. O modelo é baseado no método dos elementos finitos aplicado a materiais de comportamento linear, sendo utilizado um elemento de barra com dois nós externos e três graus de liberdade por nó, admitindo-se a aderência perfeita entre os materiais. A consideração da não-linearidade física do concreto é estabelecida por meio de processo iterativo. Os modelos constitutivos dos materiais adotados são os recomendados pela NBR 6118. A contribuição do concreto entre fissuras é desprezada. A partir da análise comparativa, feita com duas vigas biapoiadas ensaiadas por diferentes pesquisadores, o autor afirma que o modelo levou a resultados satisfatórios, apresentando poucas discrepâncias em relação aos resultados experimentais. Já a comparação dos valores das flechas calculadas pelo método simplificado da NBR

6118 apresentou desvios significativos em comparação aos resultados experimentais.

Outro estudo comparativo entre diferentes métodos de cálculo de flechas de vigas foi realizado por Silva (2006). O estudo comparou o método contido na antiga NBR 6118/1978, o método da atual NBR 6118/2007, o método bilinear do CEB1985 (estudado somente na análise comparativa dos efeitos de longa duração nas flechas), e o método do ACI que utiliza, assim como a atual norma brasileira, a equação de Branson. Os métodos foram aplicados ao cálculo da flecha de uma viga biapoiada que foi ensaiada em laboratório. Os resultados encontrados pelos diferentes métodos foram comparados ao resultado experimental para diferentes níveis de momento solicitante. A análise mostrou que os valores de flecha imediata da viga calculados pelo método da NBR 6118/2007 e pelo método do ACI, que difere da NBR apenas na obtenção de alguns parâmetros de cálculo, apresentaram valores que se aproximaram dos resultados encontrados no ensaio, com valores menores a partir de aproximadamente 60% do valor do momento último. O estudo também abordou as flechas devido aos efeitos de longa duração, mas sem comparação com resultados experimentais. Em relação às flechas de longa duração, o autor concluiu que apenas o método da antiga norma brasileira apresentou resultados discrepantes dos demais.

Diaz (2008) realizou uma análise comparativa entre deformações experimentais medidas em vigas de concreto armado com valores teóricos calculados pelo método simplificado do ACI 318/2005. Foram estudadas 277 vigas hiperestáticas e isostáticas, sendo 232 de seção retangular, 29 de seção T e 16 de seção caixa, com 810 medidas de flechas. Comparou os resultados de deslocamentos obtidos tanto para flecha imediata quanto para flecha diferida no tempo. A análise dos resultados das vigas isostáticas mostrou uma margem de erro de $\pm 20\%$ para 71% e 61% das medições de flecha imediata e diferida no tempo, respectivamente. Para as vigas hiperestáticas o erro é menor, englobando 78% das medições de flecha imediata e 94% das flechas diferidas no tempo, na margem de erro de $\pm 20\%$, onde considerou para o cálculo da inércia equivalente a inércia do apoio e a inércia do vão. Esses resultados são similares aos encontrados por Branson (1968), já citados anteriormente.

Pereira (2009), em sua dissertação, desenvolveu um programa para obtenção de esforços em serviço com consideração da não linearidade física, implementando diferentes modelos de diagrama momento-curvatura. Em seu estudo, analisou a redistribuição de esforços

em vigas contínuas para solicitações de serviço, e analisou, também, a flecha obtida pelos diferentes métodos para alguns exemplos. Os resultados das flechas obtidas para as vigas sob carregamento de serviço demonstraram que o modelo-momento curvatura do Código Modelo CEB-FIP é o que apresenta comportamento mais flexível, enquanto que o modelo da NBR 6118/2007 foi o de comportamento mais rígido no caso de seções com baixa taxa de armadura. O modelo bilinear apresentou resultados próximos aos do modelo da NBR 6118. O método de cálculo de flecha imediata da NBR 6118 e dos comentários da NB1 publicados pelo IBRACON também foram utilizados e apresentaram, em geral, resultados entre os do modelo do CEB-FIP e os do modelo da NBR 6118.

Pôde-se observar que o assunto ainda não foi estudado de forma completa, faltando uma análise abrangente dos diferentes métodos simplificados disponíveis para cálculo de flecha imediata, com o objetivo de verificar a precisão destes métodos por meio de análise de um maior volume de dados variando as características dos exemplos estudados, faltando, principalmente, um estudo com enfoque em flechas de vigas contínuas, sendo este o objetivo principal deste trabalho.

2.4 Modelos refinados para análise não linear de vigas de concreto armado

Para a consideração da não linearidade física de vigas de concreto armado, existem diversos modelos constitutivos disponíveis na literatura que podem ser acoplados aos modelos numéricos. Dentro dos modelos numéricos, o método dos elementos finitos (MEF) é o mais empregado para análise das estruturas de concreto armado, possibilitando a modelagem de variados elementos estruturais.

Para a análise não linear de vigas e pórticos de concreto armado, existem modelos refinados baseados no MEF que utilizam elementos de barras, elementos planos e também elementos sólidos. Os modelos de barra são, em geral, suficientes para representar o comportamento estrutural de vigas, com a vantagem de serem mais simples e com número reduzido de graus de liberdade quando comparados aos modelos que utilizam elementos planos ou sólidos.

No caso de vigas modeladas por elementos de barras, podem-se encontrar os esforços ou a partir da integração das tensões ao longo da seção transversal ou a partir de diagramas momento-curvatura.

Stramandinoli (2007), em sua tese de doutorado, implementou no programa computacional denominado ANALEST três modelos

refinados baseados no MEF para cálculo de vigas e pórticos planos de concreto armado. O primeiro, utiliza um elemento de barra de 3 nós e 7 graus de liberdade considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, sendo a seção transversal subdividida em camadas, onde cada camada está sujeita a um estado uniaxial de tensões. Em outro modelo, é incorporada também a deformação por cisalhamento, considerando a teoria de viga de Timoshenko, ficando cada camada submetida a um estado biaxial de tensões. E, no terceiro, as vigas e colunas são modeladas por elementos de barra e as ligações viga-coluna são modeladas por elementos planos, sendo usado um elemento finito plano híbrido de 4 nós para modelar a ligação e ainda elementos de transição para ligar os elementos planos aos de barra. Para representar o comportamento do concreto tracionado, Stramandinoli e La Rovere (2008) desenvolveram um novo modelo de “tension-stiffening”.

O modelo refinado que considera a teoria de Euler-Bernoulli é utilizado neste trabalho como referência para comparação dos modelos de EF e métodos simplificados estudados.

Uma revisão bibliográfica completa sobre demais modelos refinados que consideram a não linearidade física do concreto armado pode ser conferida em Stramandinoli (2007).

Neste capítulo foram apresentados os principais conceitos envolvidos na determinação de flechas em vigas de concreto armado. Foram expostos também, os métodos simplificados. No capítulo 3 são descritos o modelo refinado de elementos finitos de barra, implementado no programa ANALEST, e o modelo de elementos de viga estudados neste trabalho.

3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Neste capítulo estão apresentados de forma detalhada os modelos refinados que serão utilizados nos estudos: o modelo de elementos finitos de pórtico plano implementado no programa ANALEST e o modelo de elementos de viga que usa os modelos constitutivos baseados nos gráficos momento-curvatura, implementado pela autora em um programa denominado AVSer. Esses modelos estão descritos nos itens a seguir, e os programas computacionais serão apresentados no item 3.26 e no capítulo 4.

3.1 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico muito utilizado nas engenharias, principalmente na área de estruturas. A utilização deste método se desenvolveu e se difundiu junto com o avanço dos recursos computacionais, que forneceram as ferramentas necessárias. Atualmente, existem programas computacionais que permitem a análise de estruturas bastante complexas e de diversos tipos, submetidas aos mais diversos tipos de carregamento, utilizando o MEF.

Este método é uma eficiente ferramenta numérica para resolução de problemas de meio contínuo, por meio da discretização em elementos de dimensões finitas, denominados elementos finitos, interligados por pontos em seus contornos, que formam uma malha de elementos. Ou seja, com a discretização, o número infinito de pontos do domínio do modelo matemático com incógnitas a determinar é substituído pelo conjunto finito de pontos nodais da malha de elementos com número discreto de incógnitas (SORIANO, 2003). Um exemplo de discretização de um elemento de meio contínuo numa malha de elementos finitos pode ser vista na figura 3.1.

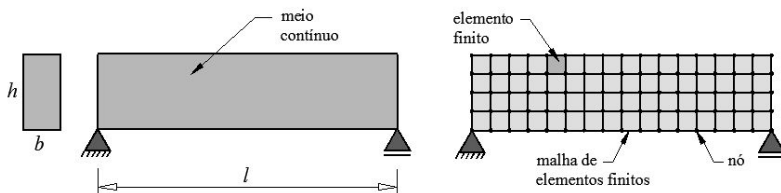


Figura 3.1 – Exemplo de discretização de viga em elementos finitos planos.

O desenvolvimento do método é muito amplo e são inúmeros os elementos disponíveis que podem ter as mais diversas formas geométricas, permitindo uma melhor representação do problema. Há elementos finitos de barras, elementos planos, elementos de placa, casca e elementos sólidos ou ainda axi-simétricos.

No modelo de deslocamentos do MEF, onde as incógnitas são os deslocamentos, a formulação é feita a partir do Princípio de Energia Potencial Mínima ou do Princípio dos Trabalhos Virtuais, sendo que este último pode ser usado tanto para formulação linear quanto para não linear.

O método dos elementos finitos pode ser definido como uma modificação do Método de Rayleigh-Ritz, em que o domínio de integração do funcional é subdividido em regiões. Escolhendo um campo de deslocamentos que atenda às condições geométricas de contorno de um meio contínuo elástico, substituindo-o no funcional de energia potencial total, e buscando o mínimo desse funcional, tem-se o método de Rayleigh-Ritz (SORIANO, 2003).

No método dos elementos finitos, ao invés de se determinar uma função admissível que descreva todo o campo de deslocamentos do domínio do problema, arbitra-se o campo de deslocamentos de cada elemento finito em função dos deslocamentos nodais. Assim, o equilíbrio do meio contínuo é trocado pelo equilíbrio de cada elemento finito isolado, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio do elemento. A partir das equações de cada elemento, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos, da mesma forma que em análise matricial.

A solução obtida por meio do MEF para o problema estudado é uma solução aproximada, que pode convergir para a solução exata à medida que se refina a malha, ou seja, à medida que se aumenta o número de elementos da malha e/ou se utilizam elementos que melhor representam o problema, desde que sejam atendidas certas condições de convergência do método, em que o campo de deslocamentos de cada elemento seja arbitrado de forma adequada.

3.2 Modelo de elementos finitos de barras com seção discretizada em camadas para análise não linear de pórticos planos de concreto armado

O modelo de elementos finitos aqui mostrado foi desenvolvido na tese de Stramandinoli (2007) para pórticos planos e vigas de concreto armado. Neste modelo, que utiliza a formulação do Método dos

Elementos Finitos, é considerada a não-linearidade física dos materiais e é desconsiderada a não-linearidade geométrica, sendo utilizado um elemento finito de barra 2D com 3 nós e 7 graus de liberdade, semelhante ao utilizado por Chan (1982), Mari (1984) e Chimello (2003).

O modelo adota a hipótese de viga de Euler-Bernoulli em que se considera que as seções permanecem planas e normais à linha neutra após a deformação, sendo então, desconsiderada a deformação por cisalhamento. Decidiu-se adotar este modelo onde se despreza o cisalhamento pelo estudo ser voltado a vigas de projeto, normalmente armadas ao cisalhamento, onde então, o seu efeito é pequeno; também devido ao fato de, nos métodos simplificados de cálculo de flechas estudados, a armação de cisalhamento não ser considerada. Neste modelo, o aço e o concreto são considerados materiais homogêneos e admite-se a perfeita aderência entre os dois materiais. Admite-se que a viga apresenta ruptura por flexão.

A seção transversal do elemento de barra é discretizada pelo Método das Lamelas, e considera-se que cada camada ou lamela está submetida a um estado uniaxial de tensões. Os esforços totais são encontrados superpondo-se os esforços das camadas de concreto com os esforços provenientes das tensões nas armaduras.

O elemento de barra utilizado no modelo possui três nós, sendo dois nós externos com três graus de liberdade e um nó interno com um grau de liberdade (deslocamento axial). Utiliza-se o método dos elementos finitos com formulação isoparamétrica.

Primeiramente será apresentada a formulação do elemento de viga/coluna com consideração de material elástico-linear, incluindo-se posteriormente a não-linearidade física dos materiais.

3.2.1 Elemento viga/coluna linear

O elemento de viga/coluna linear é formado a partir da superposição de dois elementos, um elemento de treliça com 3 nós e 3 graus de liberdade e um elemento de viga com 2 nós externos e 4 graus de liberdade, conforme Chimello (2003). O Princípio dos Trabalhos Virtuais é utilizado para obtenção da matriz de rigidez e vetor de forças consistente do elemento. A seguir estão descritos separadamente o elemento de treliça e o elemento de viga.

Elemento de treliça linear

Seja o elemento de barra de treliça de 3 nós, sendo dois externos e um interno no cento do elemento, em que se considera apenas o grau de liberdade longitudinal, de comprimento L , seção transversal de área A e módulo de elasticidade E , representado na figura 3.2.

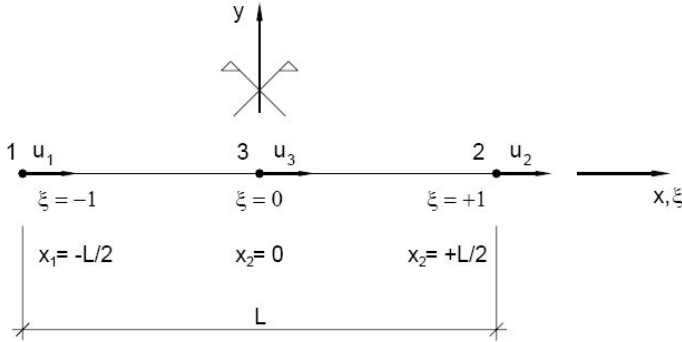


Figura 3.2 – Elemento de treliça com 3 nós (CHIMELLO, 2003)

Conforme pode ser visto na figura acima, utiliza-se no elemento a coordenada natural ξ . Assim o mapeamento, que é a transformação de coordenada cartesiana para coordenada natural, é obtido por:

$$x = \frac{\xi}{2}L \quad \text{logo:} \quad \xi = \frac{2x}{L} \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

O campo de deslocamento longitudinal ao longo do eixo longitudinal da barra (ordenada y é igual a zero), é dado por:

$$u_o(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 \alpha_1 \quad (3.1)$$

ou de forma matricial:

$$u_o(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U} \quad (3.2)$$

As funções N_i de interpolação, que descrevem o campo de deslocamentos utilizando a coordenada natural ξ , podem ser obtidas por inspeção:

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.3)$$

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3.4)$$

$$N_3 = (1 - \xi^2) \quad (3.5)$$

logo:

$$u_o(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} u_1 + \frac{1 + \xi}{2} u_2 + (1 - \xi^2) \alpha_1 \quad (3.6)$$

Para $\xi = 0$ tem-se o deslocamento axial no nó 3:

$$u_3 = \frac{u_1 + u_2}{2} + \alpha_1 \quad (3.7)$$

A deformação longitudinal ε_o do elemento é definida pela equação:

$$\varepsilon_o(\xi) = \frac{du_o}{dx} = \frac{du_o}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \cdot \frac{du_o}{d\xi} = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \cdot \alpha_1 \quad (3.8)$$

logo:

$$\varepsilon_o(\xi) = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \cdot \alpha_1 \quad (3.9)$$

e de forma matricial:

$$\varepsilon_o(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{4\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (3.10)$$

Tendo as deformações, as tensões podem ser obtidas em qualquer ponto ξ do elemento a partir da equação constitutiva para material elástico-linear (lei de Hooke):

$$\sigma_o = E \cdot \varepsilon_o \quad (3.11)$$

e sob a forma matricial:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

A matriz de rigidez do elemento é determinada a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Sabe-se que o trabalho realizado pelas forças externas nodais é igual ao trabalho realizado pelas forças internas quando se impõe uma configuração de deslocamentos virtuais ao elemento deformado, em equilíbrio; tem-se então:

$$\delta W^e = \delta W^i \quad (3.13)$$

$$\delta W^e = \delta \tilde{u}^t \tilde{k} \tilde{u} \quad (3.14)$$

$$\delta W^i = \int \delta \tilde{\varepsilon}^t \tilde{\sigma} dv = \int \delta \tilde{\varepsilon}^t \tilde{D} \tilde{\varepsilon} dv \quad (3.15)$$

Igualando as duas últimas expressões e sabendo-se que $dv = A dx = A \frac{L}{2} d\xi$, tem-se:

$$\tilde{k} = \int_{-1}^1 \tilde{B}^t \tilde{D} \tilde{B} A \frac{L}{2} d\xi \quad (3.16)$$

Substituindo \tilde{B} e \tilde{D} na expressão acima e integrando, tem-se a matriz de rigidez do elemento de treliça de 3 nós:

$$\tilde{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Elemento de viga linear

No elemento de viga, representado na figura 3.3, é admitido o deslocamento vertical v , e a rotação em torno do eixo z . O elemento possui comprimento L , seção transversal A e módulo de elasticidade E .

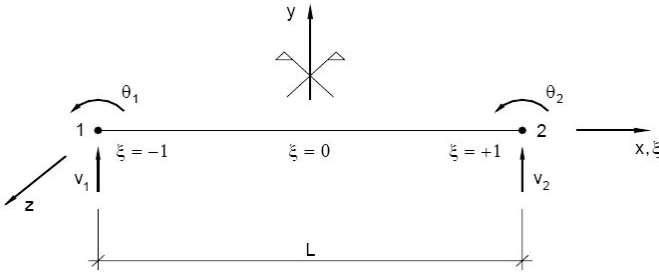


Figura 3.3 – Elemento finito de viga (CHIMELLO, 2003)

Considerando a hipótese de Euler-Bernoulli onde as seções permanecem planas depois da deformação, sendo então, a deformação causada pelo cisalhamento desprezada, tem-se que o deslocamento longitudinal em um ponto de coordenada (x,y) no elemento de viga será:

$$u = -\theta \cdot y \quad (3.18)$$

como está ilustrado na figura a seguir:

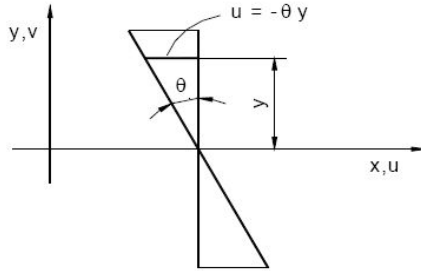


Figura 3.4 – Elemento após deformação (CHIMELLO, 2003)

O campo de deslocamento vertical é dado por:

$$v = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \quad (3.19)$$

ou, em forma matricial:

$$v = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} \quad (3.20)$$

Para as funções de interpolação N_i que definem o deslocamento vertical utilizam-se os polinômios cúbicos de Hermite:

$$N_1 = 1 - \frac{3}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)^3 \quad (3.21)$$

$$N_2 = \frac{L}{2}(\xi + 1) - \frac{L}{2}(\xi + 1)^2 + \frac{L}{8}(\xi + 1)^3 \quad (3.22)$$

$$N_3 = \frac{3}{4}(\xi + 1)^2 - \frac{1}{4}(\xi + 1)^3 \quad (3.23)$$

$$N_4 = -\frac{L}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{L}{8}(\xi + 1)^3 \quad (3.24)$$

As rotações no elemento são dadas derivando-se o campo de deslocamento vertical em relação a x e usando a regra da cadeia:

$$\theta(\xi) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{2}{L} = \frac{2}{L} [N'_1 v_1 + N'_2 \theta_1 + N'_3 v_2 + N'_4 \theta_2] \quad (3.25)$$

onde $' = \frac{d}{d\xi}$

e a curvatura φ em qualquer ponto ξ do eixo do elemento é dada por:

$$\varphi(\xi) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{4}{L^2} [N_1''v_1 + N_2''\theta_1 + N_3''v_2 + N_4''\theta_2] \quad (3.26)$$

ou:

$$\varphi = \underset{\sim}{\mathbf{B}} \underset{\sim}{\mathbf{d}} \quad (3.27)$$

O campo de deslocamentos longitudinais é obtido a partir das rotações:

$$u = -\theta \cdot y \quad \text{e, como } \theta = \frac{dv}{dx} \quad \text{e } \frac{dv}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dv}{d\xi}, \text{ tem-se então:}$$

$$u = -y \frac{dv}{dx} = -y \frac{2}{L} \frac{dv}{d\xi} \quad (3.28)$$

e a deformação na direção x:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2} y = -\varphi y \quad (3.29)$$

ou, em forma matricial: $\varepsilon_x = -\underset{\sim}{\mathbf{B}} \underset{\sim}{\mathbf{d}} y$ onde $\varphi = \underset{\sim}{\mathbf{B}} \underset{\sim}{\mathbf{d}}$

logo:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_x(\xi, y) = - \left[\frac{6\xi}{L^2} \quad \frac{1}{2}(3\xi - 1) \quad -\frac{6\xi}{L^2} \quad \frac{1}{L}(3\xi + 1) \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} y \quad (3.30)$$

Tendo as deformações, as tensões em um ponto qualquer (ξ, y) podem ser encontradas pela equação constitutiva para material elástico-linear:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (3.31)$$

ou, sob a forma matricial:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (3.32)$$

Da mesma forma que no elemento de treliça, a matriz de rigidez é encontrada a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta W^e = \delta W^i \quad (3.33)$$

Sendo o trabalho das forças externas:

$$\delta W^e = \underset{\sim}{\delta} \underset{\sim}{d}^t \underset{\sim}{f} \quad (3.34)$$

onde:

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e o trabalho realizado pelas forças internas:

$$\delta W^i = \int \delta \underset{\sim}{\varepsilon}' \underset{\sim}{\sigma} dv = \int \delta \underset{\sim}{\varepsilon}' \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} dv = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \delta \underset{\sim}{d}' \underset{\sim}{B}' \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} dx \int_A y^2 dA \quad (3.36)$$

Igualando o trabalho virtual realizado pelas forças internas ao realizado pelas forças externas, e sabendo que:

$$dx = \frac{L}{2} d\xi \quad ; \quad \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{d} \quad \text{e} \quad I = \int_A y^2 dA, \text{ obtém-se:}$$

$$\underset{\sim}{k} = \int_{-1}^1 \underset{\sim}{B}'(\xi) \underset{\sim}{E} I \underset{\sim}{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (3.37)$$

Substituindo $\underset{\sim}{B}$ na expressão acima e integrando, tem-se a matriz de rigidez para um elemento de viga com dois nós externos:

$$\underset{\sim}{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.2.2 Elemento viga/coluna não linear

Como explica Chimello (2003), para o elemento com consideração da não linearidade física, tem-se que a deformação no elemento varia linearmente ao longo do comprimento e altura da seção, dessa forma, a matriz constitutiva não pode ser mais considerada constante ao longo do elemento como no elemento elástico-linear, tem-se então que $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\varepsilon})$.

O elemento de viga/coluna não linear é apresentado na figura 3.5, onde estão ilustrados os deslocamentos nodais e sua geometria, resultado da superposição dos elementos de viga e treliça, apresentados anteriormente.

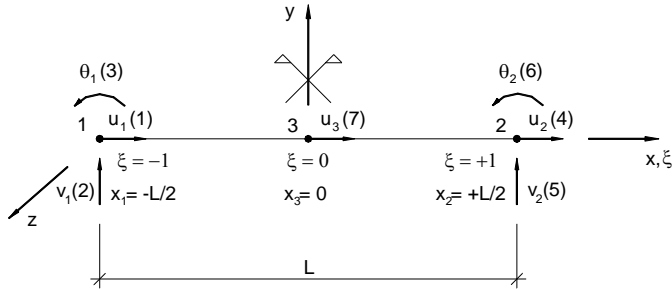


Figura 3.5 – Elemento de barra não linear com 7 graus de liberdade (CHIMELLO, 2003)

O deslocamento longitudinal é obtido pela superposição das equações 3.6 e 3.28:

$$u(\xi, y) = \frac{1-\xi}{2}u_1 + \frac{1+\xi}{2}u_2 + (1-\xi^2)\alpha_1 - y \frac{2}{L} \frac{dv}{d\xi} \quad (3.39)$$

ou:

$$u(\xi, y) = u_0(\xi) - y.\theta(\xi) \quad (3.40)$$

onde u_0 é o deslocamento axial no eixo de referência:

$$u_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}u_1 + \frac{1+\xi}{2}u_2 + (1-\xi^2)\alpha_1 \quad (3.41)$$

Conforme explica Stramandinoli (2007), o elemento de viga/coluna usual com dois nós externos e 6 graus de liberdade utiliza como funções de interpolação polinômios de 1º grau para o deslocamento longitudinal u , e polinômio de 3º grau para o deslocamento transversal v . Como $u = u_0 - y dv/dx$, tem-se que a diferença entre os graus dos polinômios de u e v é de dois e deveria ser igual a um (de forma que o campo de deslocamentos horizontal u seja descrito por um polinômio do 2º grau tanto em x como em y). Por isso foi adicionado o sétimo grau de liberdade ao elemento, tornando o grau do polinômio de deslocamento axial de segunda ordem, ficando assim o campo de deslocamentos horizontais compatível com o campo de deslocamentos verticais.

A deformação longitudinal é obtida derivando-se o campo de deslocamentos u em relação à x e aplicando-se a Regra da Cadeia:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{du}{d\xi} = \varepsilon_o(\xi) - y.\varphi(\xi) \quad (3.42)$$

a equação 3.42 pode ser reescrita sob a forma matricial:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\varepsilon}(\xi, y) \quad (3.43)$$

onde ε_o é a deformação axial na linha neutra ($y=0$):

$$\varepsilon_o(\xi) = \frac{du_o}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \cdot \frac{du_o}{d\xi} \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_o(\xi) = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \cdot \alpha_1 \quad (3.45)$$

e φ é a curvatura:

$$\varphi(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \quad (3.46)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{6\xi}{L^2} v_1 + \frac{3\xi-1}{L} \theta_1 + \frac{(-6\xi)}{L^2} v_2 + \frac{3\xi+1}{L} \theta_2 \quad (3.47)$$

Sendo $\underset{\sim}{\varepsilon}$ o vetor de deformações generalizadas:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{-4\xi}{L} \\ 0 & \frac{6\xi}{L^2} & \frac{3\xi-1}{L} & 0 & \frac{-6\xi}{L^2} & \frac{3\xi+1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (3.48)$$

sendo $\underset{\sim}{B}$ a matriz que relaciona as deformações específicas generalizadas com os deslocamentos nodais $\underset{\sim}{U}$. Logo:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_x = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (3.49)$$

A partir da equação 3.49 pode-se obter a deformação longitudinal em qualquer ponto (ξ, y) do elemento.

As tensões em cada ponto do elemento são obtidas por meio das relações constitutivas dos materiais:

$$\sigma_x = E(\xi, y) \cdot \varepsilon_x \quad (3.50)$$

Como se considera a não linearidade física do material, e como a deformação longitudinal varia ao longo do comprimento e altura da seção do elemento, o módulo de elasticidade secante E do material também varia ao longo das coordenadas.

A matriz de rigidez é obtida a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais, sendo o trabalho virtual externo:

$$\delta W^e = \delta U^{eT} \underset{\sim}{f}^e \quad (3.51)$$

em que o vetor das cargas externas:

$$\underset{\sim}{f}^{eT} = [N_1 \quad V_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad V_2 \quad M_2 \quad N_3] \quad (3.52)$$

e o trabalho virtual interno:

$$\delta W^i = \int \delta \underset{\sim}{\varepsilon} \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{dv} \quad (3.53)$$

Igualando as equações (3.51) e (3.53) e substituindo-se em seguida (3.49) e (3.50), tem-se:

$$\delta U^{eT} \underset{\sim}{f}^e = \int_V \delta U^{eT} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T E(x, y) \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} U^e \underset{\sim}{dv} \quad (3.54)$$

Sabendo que $\underset{\sim}{f}^e = k \underset{\sim}{U}^e$ e que $dv = dA \frac{L}{2} d\xi$, e como o campo de deslocamentos virtual é arbitrário e não nulo pode-se simplificar δU^{eT} na equação acima, obtendo-se a matriz de rigidez do elemento:

$$k = \int_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T E(\xi, y) \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} dV = \int_{-1}^{+1} \int_A \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T E(\xi, y) \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} dA \frac{L}{2} d\xi \quad (3.55)$$

A partir das equações constitutivas (3.50):

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (3.56)$$

pode-se reescrever a equação (3.55):

$$k = \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}(\xi) \underset{\sim}{B} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.57)$$

onde:

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}(\xi) = \int_A \underset{\sim}{A}^T E(\xi, y) \underset{\sim}{A} dA = \begin{bmatrix} EA & -ES \\ -ES & EI \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

em que:

D = matriz constitutiva (secante) equivalente da seção no ponto ξ ;

EA = rigidez axial (secante) equivalente da seção no ponto ξ ;

EI = rigidez à flexão (secante) equivalente da seção no ponto ξ ;

ES = coeficiente de acoplamento entre a rigidez axial e a de flexão equivalente (será nulo quando o eixo longitudinal passar pelo centróide da seção e o material for homogêneo, elástico-linear).

A integração da equação (3.57) ao longo do eixo ξ resulta em:

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{ES}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{ES}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{ES}{6EI} & \frac{L^3}{6EI} & \frac{4EI}{L^2} & -\frac{ES}{6EI} & -\frac{L^3}{6EI} & \frac{2EI}{L^2} \\ \frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} & -\frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{ES}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{ES}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{ES}{6EI} & \frac{L^3}{6EI} & \frac{2EI}{L^2} & -\frac{ES}{6EI} & -\frac{L^3}{6EI} & \frac{4EI}{L^2} \\ -\frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} & \frac{L}{EA} & -\frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} \\ 0 & -\frac{8ES}{L^2} & -\frac{4ES}{L} & 0 & \frac{8ES}{L^2} & \frac{4ES}{L} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Na formulação não linear, será utilizada a matriz de rigidez tangente do elemento k^t , reescrevendo-se então as equações (3.57) e (3.58):

$$\tilde{k}^t = \int_{-1}^{+1} \tilde{B}^T \tilde{D}^t(\xi) \tilde{B} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.60)$$

$$\tilde{D}^t(\xi) = \int_{\tilde{A}} \tilde{A}^T \tilde{E}^t(\xi, y) \tilde{A} d\tilde{A} \quad (3.61)$$

sendo E^t o módulo tangente do material.

A aplicação das forças externas é feita incrementalmente, e, devido à não linearidade do material, a cada incremento de carga as forças externas totais podem não estar em equilíbrio com as forças internas ou restauradoras do elemento dadas por:

$$\tilde{r} = \int_{-1}^{+1} \tilde{B}^T \tilde{\sigma} d\xi \quad (3.62)$$

onde:

$$\tilde{\sigma}(\xi) = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \tilde{D} \tilde{\varepsilon} \quad (3.63)$$

é o vetor de tensões generalizadas, sendo N o esforço axial e M o momento fletor na seção correspondente ao ponto ξ .

A diferença entre as forças externas e internas é chamada de força residual $\tilde{w} = \tilde{f} - \tilde{r}$. Para se dissipar essa diferença e restabelecer o equilíbrio do elemento, é necessário se aplicar um processo iterativo, sendo usado neste modelo o método de Newton-Raphson (rigidez tangente).

A avaliação das integrais da matriz de rigidez e do vetor de forças restauradoras ao longo de ξ é feita por meio da Regra de Integração de Gauss, utilizando-se 3 pontos de integração, de forma a capturar a não-linearidade ao longo do elemento, podendo assim se utilizar uma malha mais grossa. Assim, as expressões da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças restauradoras são escritas respectivamente na forma:

$$\tilde{k}^t = \sum_{i=1}^{ng} W_i B^T(\xi_i) D^t(\xi_i) B(\xi_i) \frac{L}{2} \quad (3.64)$$

$$\tilde{r}^e = \sum_{i=1}^{ng} W_i B^T(\xi_i) \sigma(\xi_i) \frac{L}{2} \quad (3.65)$$

onde ng é o número de pontos de Gauss, W_i é o peso e ξ o ponto de Gauss.

A posição ξ dos três pontos de Gauss utilizados são: $\xi_1 = -\sqrt{0.6}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = +\sqrt{0.6}$; e os pesos W_i são: $W_1=5/9$, $W_2=8/9$ e $W_3=5/9$.

Em cada ponto de integração ξ_i , deve-se então calcular a matriz constitutiva tangente na expressão (3.64) e o vetor de tensões generalizadas na expressão (3.65), o que será feito pelo Método das Lamelas, a ser descrito com maiores detalhes no item 3.2.3. A seção em cada ponto de integração é discretizada em camadas e a integral que define a matriz constitutiva tangente em (3.60) é efetuada somando-se os coeficientes de todas as camadas. Da mesma forma, o vetor de tensões generalizadas é obtido pela eq. (3.63) a partir da matriz constitutiva secante, cuja integral que a define, eq. (3.58), é efetuada somando-se os coeficientes de todas as camadas.

Após a formação da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças restauradoras de cada elemento, faz-se a condensação estática para eliminar o sétimo grau de liberdade (parâmetro α_I), o qual pode ser eliminado tendo em vista que as incógnitas nodais do nó interno não

participam das condições de compatibilidade dos elementos adjacentes. Assim, diminui-se o número de graus de liberdade do sistema global, reduzindo-se o número de equações a resolver.

A partir da contribuição de todos os elementos, forma-se a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças da estrutura, e, a partir desta etapa, utilizam-se os métodos usuais de análise matricial para resolução do sistema de equações de equilíbrio.

3.2.3 Método das Lamelas

Para a obtenção da matriz constitutiva e dos esforços em cada ponto de Gauss do elemento, é utilizado o Método das Lamelas onde a seção transversal é dividida em camadas ou lamelas em cada ponto de Gauss. Consideram-se camadas de concreto e de armadura sobrepostas, e a origem do eixo y pode ser colocada em qualquer ponto da seção. Na Figura 3.6 está ilustrada a discretização de uma seção transversal por esse método, na qual se colocou a origem de y no centróide da seção.

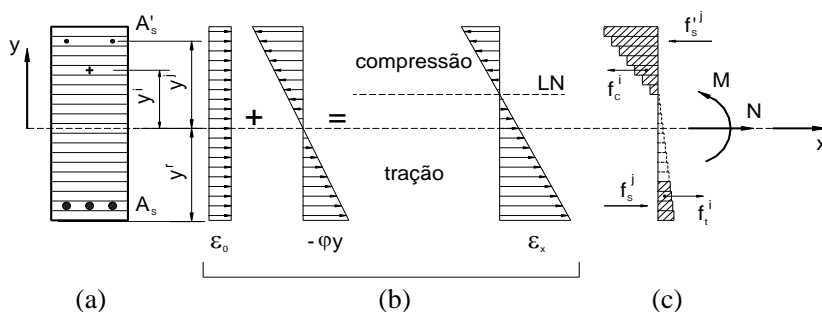


Figura 3.6 – Métodos das Lamelas: a) discretização da seção em lamelas; b) distribuição de deformações; c) esforços totais. (CHIMELLO, 2003).

Cada camada é submetida a um estado uniaxial de tensões normais à seção. A deformação no centro de cada camada i é obtida por:

$$\varepsilon_c^i = \varepsilon_0 - y^i \phi \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_s^j = \varepsilon_0 - y^j \phi \quad (3.67)$$

sendo:

ε_c^i = a deformação numa camada i da seção de concreto;

ε_s^j = deformação numa camada j de armadura;

y^i = é a distância do centróide da camada de concreto à origem;

y^j = é a distância do centróide da camada de aço à origem.

A partir das deformações no centro de cada camada, as tensões correspondentes nas camadas de concreto f_c^i e aço f_s^j são obtidas a partir das relações constitutivas desses materiais e, em seguida, os esforços N e M na seção são encontrados pela superposição dos esforços de cada camada de concreto e das camadas de aço. Estes esforços são utilizados para o cálculo do vetor de forças restauradoras:

$$N = \sum_i A_c^i f_c^i + \sum_j A_s^j f_s^j \quad (3.68)$$

$$M = - \sum_i A_c^i f_c^i y^i - \sum_j A_s^j f_s^j y^j \quad (3.69)$$

onde:

A_c^i : área de concreto da camada i ;

A_s^j : área de aço da armadura j .

As equações de N e M podem ser reescritas introduzindo-se as equações (3.66) e (3.67) e utilizando o módulo de elasticidade secante do concreto e aço:

$$N = \sum_i A_c^i E_c^i (\varepsilon_o - y^i \varphi) + \sum_j A_s^j E_s^j (\varepsilon_o - y^j \varphi) \quad (3.70)$$

$$M = - \sum_i A_c^i E_c^i y^i (\varepsilon_o - y^i \varphi) - \sum_j A_s^j E_s^j y^j (\varepsilon_o - y^j \varphi) \quad (3.71)$$

e em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (3.72)$$

onde $\underset{\sim}{D}$ é a matriz constitutiva secante.

A matriz constitutiva tangente é obtida de forma análoga e é utilizada para a obtenção da matriz de rigidez tangente. Seus coeficientes são:

$$D_{11}^t = \sum_i A_c^i (E_c^i)^t + \sum_j A_s^j (E_s^j)^t \quad (3.73)$$

$$D_{12}^t = D_{21}^t = -\sum_i A_c^i (E_c^i)^t y^i - \sum_j A_s^j (E_s^j)^t y^j \quad (3.74)$$

$$D_{22}^t = \sum_i A_c^i (E_c^i)^t (y^i)^2 + \sum_j A_s^j (E_s^j)^t (y^j)^2 \quad (3.75)$$

3.2.4 Relações constitutivas dos materiais

Concreto sob compressão

Para o concreto sob compressão uniaxial, foram utilizados dois modelos descritos a seguir: o primeiro é o Modelo de Hognestad e o segundo é o proposto pelo CEB.

Modelo de Hognestad

A relação tensão-deformação no modelo original de Hognestad é uma equação do 2º. grau para o ramo ascendente da curva e uma reta para o trecho descendente. No entanto, será utilizada no modelo a parábola de Hognestad tanto para o ramo ascendente quanto para o ramo descendente.

$$\sigma_c = -f_{cm} \left[2 \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (3.76)$$

onde:

σ_c = tensão no concreto;

f_{cm} = resistência média à compressão do concreto (considerada positiva);

ε_0 = deformação correspondente à tensão máxima f_{cm} (considerada positiva);

ε_c = deformação no concreto.

Modelo do Código Modelo CEB-FIP 1990

O modelo do CEB consiste na curva dada pela expressão:

$$\sigma_c = -\frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}}\left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right) - \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right)\left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)} f_{cm} \quad \text{para } \varepsilon_c < \varepsilon_{lim} \quad (3.77)$$

onde:

σ_c = tensão no concreto;

f_{cm} = valor médio da resistência à compressão (considerada positiva) ;

ε_{c1} = deformação correspondente à tensão máxima f_{cm} (considerada positiva, o CEB indica o valor de 0.0022);

ε_c = deformação no concreto;

ε_{lim} = deformação limite a ser considerada (positiva), correspondente a uma tensão de $0.5 f_{cm}$ no ramo descendente da curva;

E_{ci} = módulo de deformação longitudinal inicial calculado por:

$$E_{ci} = 2.15 \times 10^4 \text{ MPa} \times \left[\frac{f_{cm}(\text{MPa})}{10 \text{ MPa}} \right]^{1/3} \quad (3.78)$$

$$E_{c1} = \text{módulo de deformação secante} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} ;$$

Concreto sob tração uniaxial

Para o concreto submetido à tração uniaxial, admite-se que seu comportamento é elástico linear até atingir a tensão máxima de tração. Após atingir essa tensão, o concreto entre fissuras ainda contribui para a resistência da peça de concreto armado, devido à transferência de tensões causada pela aderência entre o concreto e o aço, o chamado efeito “tension-stiffening”.

Existem diversos modelos para a consideração deste efeito. Neste trabalho será utilizado o modelo de “tension-stiffening” proposto por Stramandinoli e La Rovere (2008), baseado no modelo constitutivo do CEB (1985) e que utiliza o conceito de decaimento exponencial do modelo de Gupta e Maestrini (1990).

Neste modelo de “tension-stiffening”, modifica-se a equação constitutiva do concreto após a fissuração, considerando um decaimento exponencial em função de um parâmetro α , que é obtido em função da

taxa de armadura e da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço, a partir do modelo do CEB (1985).

Para $\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}$:

$$\sigma_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (3.79)$$

e quando $\varepsilon_{cr} < \varepsilon_t \leq \varepsilon_y$:

$$\sigma_{ct} = f_{ct,m} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{cr}} \right)} \quad (3.80)$$

$$\alpha = 0.017 + 0.255(n\rho) - 0.106(n\rho)^2 + 0.016(n\rho)^3 \quad (3.81)$$

para $\varepsilon_t > \varepsilon_y$: $\sigma_{ct} = 0$

onde:

σ_{ct} = tensão de tração no concreto;

$f_{ct,m}$ = resistência média à tração do concreto;

ε_t = deformação no concreto;

$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct,m}}{E_c}$ deformação correspondente ao início da fissuração;

ε_y = deformação específica correspondente ao escoamento do aço;

$n = \frac{E_s}{E_c}$ relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto

ρ = taxa de armadura.

Para a aplicação deste modelo de “tension-stiffening” em vigas, deve-se calcular a altura efetiva da zona tracionada em que será considerado o efeito, que pode ser estimada por uma equação recomendada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990:

$$h_{ef} = 2.5(h-d) < \frac{h-x}{3} \quad (3.82)$$

onde:

h = altura total da seção da viga

d = altura útil

x = altura da zona comprimida.

Admitindo-se usualmente que $h-d \cong 0.1h$, tem-se que: $h_{ef} \cong \frac{h}{4}$

Portanto o efeito de “tension-stiffening” só será aplicado em um quarto da seção e a taxa de armadura longitudinal será modificada, calculada para $h/4$.

Aço

O aço submetido à tração e à compressão é considerado um material elasto-plástico com diagrama tensão-deformação dado por uma curva bilinear que pode ser visto na figura 3.7. Para evitar problemas de convergência e oscilações no processo iterativo, adota-se uma curva parabólica de interpolação entre os trechos retilíneos do regime elástico e plástico, de $0,8$ a $1,2 \cdot \varepsilon_y$ conforme La Rovere (1990).

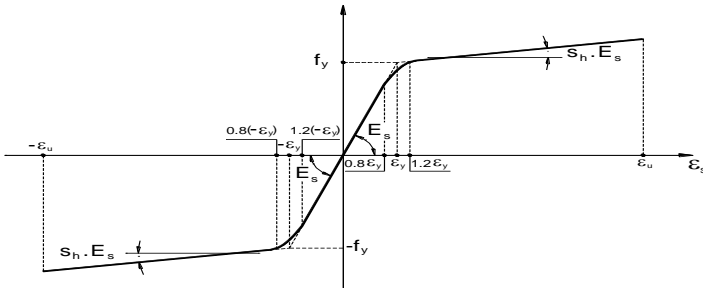


Figura 3.7 – Curva tensão-deformação para o aço

As equações do diagrama tensão-deformação são dadas por:

para $\varepsilon_s < 0,8 \cdot \varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (3.83)$$

$$E_s^t = E_s \quad (3.84)$$

$$E_s^s = E_s \quad (3.85)$$

para $0,8 \cdot \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1,2 \cdot \varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \left[(S_h - 1) \varepsilon_s \times \frac{\varepsilon_s}{0,8 \varepsilon_y} + (3 - 2S_h) - \varepsilon_s - 0,8 \varepsilon_y (1 - S_h) \right] \quad (3.86)$$

$$E_s^t = E_s \left[(2S_h - 2) \frac{\varepsilon_s}{0,8 \varepsilon_y} + (3 - 2S_h) \right] \quad (3.87)$$

$$E_s^s = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (3.88)$$

para $\varepsilon_s > 1,2\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = f_y + S_h E_s (\varepsilon_s - \varepsilon_y) \quad (3.89)$$

$$E_s^s = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (3.90)$$

onde:

f_y = tensão de escoamento do aço;

ε_y = é a deformação correspondente a f_y ;

ε_u = deformação última;

E_s = módulo de elasticidade do aço;

s_h = parâmetro de enrijecimento após o escoamento (*strain-hardening*), que pode ser nulo no caso de patamar horizontal.

3.2.5 Método de Newton-Raphson

Este método é utilizado para a solução do sistema de equações não lineares da estrutura, $\tilde{K} \tilde{U} = \tilde{F}$, onde a matriz de rigidez da estrutura

depende do vetor de deslocamentos nodais, $\tilde{K} = \tilde{K}(\tilde{U})$. O método é incremental e iterativo, aplica-se a cada etapa um incremento de carga e calcula-se o incremento de deslocamento até a convergência do equilíbrio das forças.

Como explica Stramandinoli (2007), para uma determinada iteração “i” de uma etapa “e”, faz-se:

$$[K]_{i-1} \{\Delta U\}_i = \{\psi\}_{i-1} \quad (3.91)$$

onde:

$[K]_{i-1}$ é a matriz de rigidez da estrutura da iteração “i - 1”;

$\{\psi\}_{i-1}$ é o vetor de forças residuais da estrutura dado por:

$$\{\psi\}_{i-1} = \{F\}_e - \{R\}_{i-1}$$

em que $\{F\}_e$ é o vetor de forças nodais aplicadas na estrutura na etapa e;

$\{R\}_i$ é o vetor de forças internas ou restauradoras da estrutura;

No final de cada iteração calcula-se:

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i \quad (3.92)$$

Após obter os deslocamentos nodais da estrutura, calculam-se as deformações, tensões, vetor de esforços internos, e a matriz de rigidez

tangente de cada elemento, a partir dos quais se formam o vetor de forças internas, $\{R\}_i$ e a matriz de rigidez $[K]_i$ da estrutura.

Tendo o vetor de esforços internos da estrutura, calcula-se o novo vetor de forças residuais:

$$\{\psi\}_i = \{F\}_e - \{R\}_i \quad (3.93)$$

As iterações dentro de cada etapa continuam até o vetor de forças residuais tender a zero ou estar dentro da tolerância desejada, e conseqüentemente $\{\Delta U\}$ também tender a zero. Obtido o equilíbrio do sistema, parte-se para uma nova etapa onde é aplicado um novo incremento de carga.

Para a primeira iteração de cada etapa, adota-se:

$[K]_0$ - matriz de rigidez da última iteração da etapa anterior;

$\{\psi\}_0 = \{\Delta F\}_e$, ou seja, aplica-se na primeira iteração o incremento de cargas externas;

$\{U\}_0$ - vetor de deslocamentos da última iteração da etapa anterior;

$\{F\}_e$ - vetor de cargas externas aplicado na etapa “e” dado por:

$$\{F\}_e = \{F\}_{e-1} + \{\Delta F\}_e \quad (3.94)$$

A matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração, caracterizando o Método de Newton-Raphson de método de rigidez tangente.

3.2.6 Programa ANALEST

O modelo de cálculo de viga/pórtico plano, descrito no item 3.2, foi implementado em um programa denominado ANALEST utilizando a linguagem FORTRAN 90. Este programa foi desenvolvido inicialmente para vigas por Chimello (2003), baseado no programa NOPLAN, desenvolvido por La Rovere (1990), e posteriormente aperfeiçoado e estendido para pórticos planos por Stramandinoli (2007), considerando também a não linearidade geométrica.

O programa é subdividido em módulos ou sub-programas, ligados por arquivos binários, e utiliza bibliotecas estáticas para otimizar o processamento. A entrada de dados é feita a partir de um arquivo texto, e são gerados arquivos de saída formatados para a visualização dos dados de entrada lidos pelo programa e dos resultados da análise não-linear. Mais detalhes do programa podem ser encontrados em Stramandinoli (2007).

3.3 Modelo de elementos de viga (MEV) utilizando modelos constitutivos a partir de diagramas momento-curvatura

Este modelo foi implementado, assim como os demais métodos simplificados estudados, no programa computacional desenvolvido pela autora deste trabalho denominado AVSer, que está descrito no próximo capítulo.

Pode ser usado tanto para a obtenção de flecha imediata como para esforços em serviço de vigas de concreto armado, e ainda para análise linear. Adota-se a hipótese de Euler-Bernoulli onde as seções permanecem planas depois da deformação, sendo então, desprezada a deformação devido ao cisalhamento, e utiliza-se elemento finito de barra de 2 nós com 4 graus de liberdade (deslocamento vertical e rotação em torno do eixo perpendicular ao plano).

O modelo consiste em discretizar a viga em vários elementos de viga de pequena dimensão, utilizando os conceitos de Análise Matricial para a obtenção dos esforços e deslocamentos nodais. Cada elemento tem sua rigidez EI calculada individualmente conforme a solicitação atuante para a consideração do efeito “tension-stiffening”. Para isso, utilizam-se dois modelos constitutivos em função de diagramas momento-curvatura: a fórmula de Branson e o método Bilinear indicado pelo CEB.

Este modelo numérico pode ser considerado um método intermediário, pois é mais refinado que os métodos simplificados expostos anteriormente, mas não utiliza modelos constitutivos e formulação tão refinados como os utilizados no modelo de elementos finitos de barras do ANALEST.

A rigidez EI é calculada com os dados da seção do elemento, adotando como momento fletor (M_a) a média em módulo dos momentos atuantes nas extremidades do elemento. Para o cálculo da inércia no estágio I e estágio II, a seção é homogeneizada sendo considerada a distribuição das armaduras em diferentes camadas e as armaduras tanto de tração quanto de compressão.

No processo de cálculo para obtenção dos deslocamentos utilizando os gráficos momento-curvatura, primeiramente é realizada uma análise linear utilizando a inércia da seção homogeneizada para obter-se um valor M_a inicial, para então calcular o valor de EI de cada elemento utilizando a fórmula de Branson ou Bilinear, e em seguida, realizar uma nova análise. Um processo iterativo de cálculo é realizado até que os momentos fletores de cada nó da viga obtidos na última análise tenham convergido para os momentos fletores calculados na

etapa anterior, sempre utilizando os momentos fletores da análise anterior para o cálculo de EI a ser utilizado na nova análise. Pereira (2009) utilizou o mesmo modelo de cálculo em sua dissertação, também implementado em um programa computacional onde disponibiliza também a visualização dos diagramas momento-curvatura das seções.

No processo de cálculo adotado, a rigidez é obtida diretamente sem a montagem do gráfico momento-curvatura, ou seja, sem o cálculo da curvatura, sendo que a rigidez calculada é uma rigidez secante (EI)_{sec}.

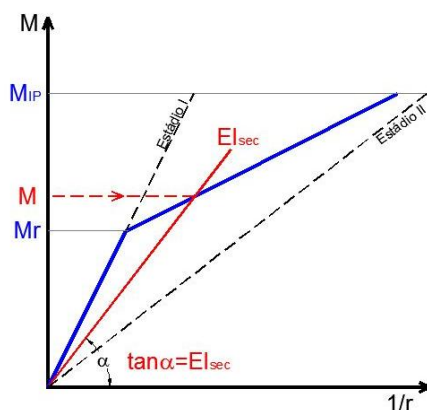


Figura 3.8 – Rigidez secante no diagrama momento-curvatura

Para a análise de uma viga por este modelo, é necessário que a viga já esteja dimensionada e com as armaduras longitudinais detalhadas. A discretização em vários elementos é fundamental para que cada trecho da viga submetido a um grau de fissuração diferente tenha sua rigidez individual calculada e, assim, a variação de rigidez existente ao longo da viga possa ser devidamente considerada. A discretização é necessária também, para indicar as mudanças de armadura e de carregamento ao longo da viga.

Como o modelo dispõe de dois métodos para a consideração da não linearidade física, pode-se então, dividi-lo em dois sub-modelos: o modelo que utiliza a fórmula de Branson (MEV-Branson), e o modelo que utiliza o método Bilinear (MEV-Bilinear). A seguir estão descritas algumas particularidades de cada um.

3.3.1 MEV-Branson

A rigidez secante de cada elemento que atinge o momento de fissuração M_r é calculada pela equação 2.8 (fórmula de Branson) utilizando os dados do elemento e o momento M_a atuante.

Neste método pode-se variar o expoente da equação 2.8 entre $m=3$ e $m=4$. Pode-se ainda variar a forma do cálculo do EI de cada barra, adotando-se ou um valor médio em módulo dos momentos atuantes nas extremidades do elemento para então calcular o EI da barra, como fez Pereira (2009), ou pode-se calcular 3 valores de rigidez EI nos 3 pontos de Gauss, utilizando o momento atuante nesses pontos para então obter-se o EI do elemento. A figura 3.9 ilustra a localização destes 3 pontos num elemento de viga (COOK et al, 1989).

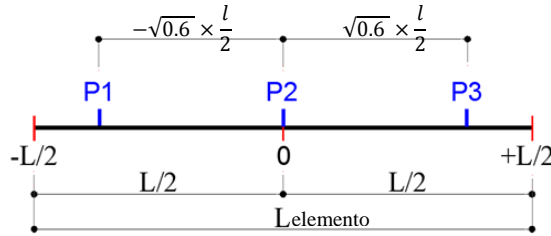


Figura 3.9 – Posição dos 3 pontos de Gauss no elemento

O cálculo da rigidez média $(EI)_{med}$ do elemento de viga é feito pela ponderação dos 3 valores encontrados nos 3 pontos de Gauss por meio dos pesos correspondentes a cada ponto de Gauss (COOK et al, 1989).

$$(EI)_{med} = \frac{\int_0^L EI(x) dx}{L} = \frac{\int_{-1}^1 EI(\xi) \frac{L}{2} d\xi}{L} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 w_j EI(\xi_j) \quad (3.95)$$

$$(EI)_{med} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{9} EI_{P1} + \frac{8}{9} EI_{P2} + \frac{5}{9} EI_{P3} \right) \quad (3.96)$$

No capítulo 5 está mostrado um estudo paramétrico realizado para comparação destas duas formas de obtenção da rigidez secante EI de cada elemento.

3.3.2 MEV-Bilinear

Para a obtenção da rigidez secante pelo método Bilinear (EI_B) utilizando-se o coeficiente de distribuição na curvatura, altera-se a equação 2.18 para:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_B = \zeta \left(\frac{1}{r}\right)_{II} + (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_I \quad (3.97)$$

sendo:

$\left(\frac{1}{r}\right)_B$ = curvatura ponderada;

$\left(\frac{1}{r}\right)_{II}$, $\left(\frac{1}{r}\right)_I$ = curvatura no estágio II e no estágio I respectivamente;

ζ = coeficiente de distribuição dado pela equação 2.20.

Sabendo que:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_B = \frac{M}{(EI)_B} \rightarrow (EI)_B = \frac{M}{(1/r)_B} \quad (3.98)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_I = \frac{M}{EI_I} \quad (3.99)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{II} = \frac{M}{EI_{II}} \quad (3.100)$$

pode-se obter a rigidez secante ponderada diretamente por:

$$(EI)_B = \frac{1}{\zeta \frac{1}{EI_{II}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{EI_I}} \quad (3.101)$$

O coeficiente β é adotado como 1 conforme recomendação do Eurocode 2 (1992) para barras de alta aderência e primeiro carregamento, o que está de acordo com os exemplos de vigas a serem estudados neste trabalho; logo, o coeficiente de ponderação, simplificando a equação 2.20, fica sendo:

$$\zeta = 1 - \frac{M_r}{M} \quad (3.102)$$

No próximo capítulo será descrito o programa computacional AVSer desenvolvido, onde foram implementados esses métodos de elementos de viga, o MEV-Branson e o MEV-Bilinear, e também os métodos simplificados.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MODELO DE ELEMENTOS DE VIGA

Para a realização dos estudos necessários ao desenvolvimento desta dissertação, foi desenvolvido um programa computacional para resolução de vigas de concreto armado denominado **AVSer** (Análise de deformações e esforços de Vigas de concreto armado em **Serviço**).

O programa foi desenvolvido no ambiente REALbasic, baseado na linguagem de programação Basic, contendo, também, programação orientada ao objeto (OOP).

Para a resolução das vigas foram adotados os conceitos de análise matricial das estruturas. Como o método dos deslocamentos com formulação matricial é o mais adequado para implementação em programas computacionais, foi o método selecionado para o desenvolvimento do programa.

Para se obter as flechas e esforços em serviço pelo programa é necessário inicialmente que a viga já esteja dimensionada, com geometria e armadura longitudinal definidas, para então a viga ser discretizada em elementos de barras que devem ser enumerados sequencialmente, formando uma malha de elementos de barra. É necessário adicionar um nó quando há mudança de carregamento, carga nodal (carga concentrada ou momento fletor), mudança de armadura ou de seção transversal. Pode-se calcular vigas com até três camadas de armadura positiva e até três camadas de armadura negativa.

O programa pode ser utilizado para cargas até o início do escoamento do aço, já que os métodos simplificados e o MEV não representam o escoamento do aço, somente a fissuração do concreto, sendo então, destinado para vigas dimensionadas no domínio 2 e 3. Vigas dimensionadas no domínio 4 também podem ser analisadas pelo programa desde que para carregamentos de serviço.

É necessário que a viga seja discretizada num número mínimo de elementos para se obter o melhor resultado do modelo refinado. Para isso, um estudo paramétrico investigando o número de elementos ideal foi realizado e é mostrado no próximo capítulo.

Quanto aos métodos simplificados, apesar de adotarem somente uma seção de referência para o cálculo da rigidez, Branson-NBR 6118 e Bilinear, e duas ou três seções no caso do método simplificado Branson-Ibracon (para vigas contínuas), o programa necessita que a viga também seja discretizada em vários elementos para que possa identificar qual a seção que está sujeita à maior solicitação e portanto, qual a seção a ser tomada como referência. Se o usuário conhece o diagrama de momento

fletor da viga e pode identificar previamente as seções de momento máximo, pode adotar uma discretização com um menor número de nós/elementos; no caso de não conhecer, recomenda-se usar uma malha mais refinada.

4.1 Apresentação do programa

O programa possui uma janela inicial onde estão disponíveis ao usuário as opções de cálculo e onde é carregado o arquivo de entrada de dados da viga.

AVSer - Análise de deformações e esforços de Vigas de concreto armado em Serviço

Arquivo Editar Ajuda

Dados do Material:

Peso Específico:	Concreto:	Aço:
0,00 kN/m³	f _{ck} : 25 MPa	Es: 210000 MPa
	E _{cs} : 0 MPa	f _{yk} : 500 MPa

Dados Gerais: Ler Arquivo de Dados

Rigidez EI

- ☐ Inércia da seção bruta de concreto
- ☐ Inércia com seção homogeneizada (Estádio I)
- ☐ Inércia Estádio II

Métodos Simplificados:

- ☐ Branson conforme NBR 6118
- ☐ Branson conforme Ibracon
- ☐ Método Bilinear:
 - ☐ Coeficiente aplicado a Flecha
 - ☐ Coeficiente aplicado a Curvatura

Modelo Refinado:

- ☐ Branson
 - Expoente: 3
 - Cálculo de Eleq: 1 Eleq/barra
- ☐ Bilinear

Carga Incremental:

- ☐ Calcular viga com carga incremental
 - Valor do incremento (para P ou q): 1 kN ou kN/m
 - Carga Final em serviço (P ou q): 10 kN ou kN/m
 - Carga distribuída inicial aplicada em toda a viga (quando houver): 0 kN/m

Resultados Carga-Flecha:

- ☐ Mostrar resultados de todos os Nós
- ☐ Somente dos Nós: 1,2,3,4
- ☐ Mostrar apenas nó com flecha máxima (de cada vão)

Calcular Resultados Fechar

Figura 4.1 – Janela inicial do programa AVSer

Na parte superior da Janela Inicial do programa, o usuário fornece os dados iniciais do material, tendo a opção de considerar ou não o peso próprio da viga, informando o seu valor no espaço *Peso Específico*. A resistência característica do concreto (f_{ck}) deve obrigatoriamente ser informada, e o módulo de elasticidade secante (E_{cs}) pode ou não ser informado; caso não seja, o programa calcula o valor de

E_{cs} a partir do f_{ck} de acordo com o item 8.2.8 da NBR 6118/2007. O valor de f_{yk} (tensão característica de escoamento do aço) deve ser informado para verificação do momento em que se inicia o escoamento do aço (admitindo vigas no domínio 2 ou 3).

Ao ativar o botão *Ler Arquivo de Dados* o usuário deverá carregar o arquivo de texto contendo os dados da viga que deseja calcular. O arquivo modelo, que deve obrigatoriamente ser seguido para o correto funcionamento do programa, pode ser editado em uma planilha eletrônica, e salvo posteriormente em formato “.csv (*separado por vírgulas*)”, arquivo de texto com dados separados por ponto e vírgula que pode ser aberto sempre que necessário em planilha eletrônica.

Na figura 4.2 está a ilustração do arquivo modelo que deve ser seguido. Os dados devem ser informados conforme posição indicada, sem adição de novas colunas, mas com número variável de linhas conforme a discretização da viga, onde são informados os dados de cada elemento/nó. O texto entre colchetes “[Dados]”, “[Carga/Vínculo]” e “[Fim]” deve ser fielmente copiado para que o programa localize os dados, e a linha seguinte de “[Dados]” e “[Carga/Vínculo]” é livre para descrição dos dados de cada coluna, não precisando o texto ser seguido igual ao exemplo mostrado.

[Dados]																
Barra	L (m)	b (m)	h (m)	arm.sup. cam.1 (cm ²)	arm.sup. cam.2 (cm ²)	arm.sup. cam.3 (cm ²)	arm. inf. cam.1 (cm ²)	arm. inf. cam.2 (cm ²)	arm.inf. cam.3 (cm ²)	dsup1 (m)	dsup2 (m)	dsup3 (m)	dinf1 (m)	dinf2 (m)	dinf3 (m)	q (kN/m)
1																
2																
3																
4																
[Carga/Vínculo]																
Nó	P (kN)	M (kN.m)	Vinc. Vert.	Vinc. Rot.												
1																
2																
3																
4																
5																
[fim]																

Figura 4.2 – Arquivo modelo do programa AVSer

Nas opções disponíveis dentro do quadro *Rigidez EI*, pode-se escolher o método de cálculo a ser utilizado, tendo a opção de realizar o cálculo com a rigidez *EI* considerando a inércia da seção bruta, com a seção homogeneizada (considerando a armadura no cálculo da inércia), ou calculando a rigidez *EI* com a inércia no Estádio II puro, ou seja, sem a consideração do concreto fissurado. Dentro dos métodos simplificados

para cálculo de flecha imediata e esforços em serviço, tem-se a opção de considerar o efeito “tension-stiffening” pela fórmula de Branson conforme a NBR-6118/2007 ou conforme os comentários técnicos da NB-1 publicados pelo Ibracon. Também há a opção do Método Bilinear, onde o coeficiente de distribuição pode ser aplicado diretamente na flecha ou na curvatura, onde se obtêm, além das deformações, os esforços em serviço.

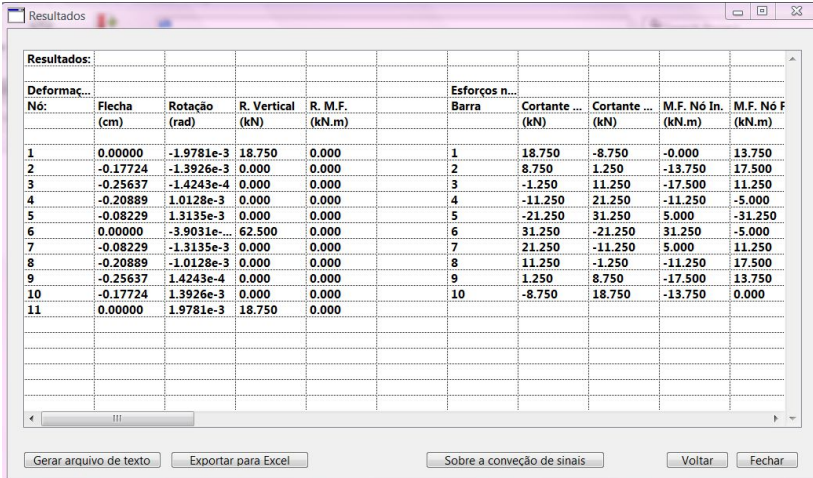
No modelo refinado de elementos de vigas estão disponíveis as opções de se considerar o efeito “tension-stiffening” por meio da fórmula de Branson, ou também pelo método Bilinear. Ao se utilizar a fórmula de Branson há a opção de se calcular o valor de EI_{eq} de cada barra utilizando um valor médio do momento fletor atuante ($1 EI_{eq}$), ou por meio da ponderação de $3 EI_{eq}$ por barra (calculados nos 3 pontos de Gauss) como já mencionado no capítulo anterior; pode-se, ainda, selecionar o coeficiente da fórmula entre $m=3$ e $m=4$.

O programa possui uma ferramenta de estudo de flecha com carga incremental, em que o usuário deve especificar o valor da carga final e o valor do incremento de carga na janela inicial (valores em módulo). O estudo pode ser feito para qualquer combinação de carregamento (carga distribuída e/ou concentrada). Para isso, é necessário indicar no arquivo de entrada de dados os nós ou barras submetidos ao carregamento por meio do coeficiente que indica o sentido de aplicação do carregamento e a porcentagem da carga de serviço total indicada na janela inicial que o nó ou barra está submetido. Se o usuário deseja aplicar uma carga inicial, deve especificá-la no campo *Carga inicial* para o caso de carga distribuída uniformemente em toda a viga.

No cálculo por carga incremental para os modelos refinados, a rigidez usada no primeiro cálculo do próximo incremento de carga é a rigidez calculada na última iteração do incremento anterior.

Após o cálculo da viga, o usuário pode abrir outra janela onde serão apresentados os resultados do processamento. Se preferir, é possível exportar os resultados encontrados para uma planilha eletrônica ou gerar arquivo de texto no formato “.csv” que possibilita a abertura do arquivo em uma planilha eletrônica. Para uma viga calculada para uma determinada carga de serviço são mostrados os resultados dos deslocamentos verticais (flechas) e rotações dos nós, as reações de apoio, e os esforços (momento fletor e esforço cortante) atuantes nas extremidades das barras, como mostra a figura 4.3, que contém os resultados do cálculo da viga VC1, que é estudada no próximo capítulo, para a malha 1 e carga distribuída de 10 kN.

Os resultados dos cálculos realizados com carga incremental são mostrados pela relação Carga-Flecha, com a opção de se mostrar somente o nó com maior flecha de cada vão, os nós especificados pelo usuário ou, ainda, pode-se mostrar todos os nós.



Resultados:

Deformaç...					Esforços n...				
Nó:	Flecha (cm)	Rotação (rad)	R. Vertical (kN)	R. M.F. (kN.m)	Barra	Cortante ... (kN)	Cortante ... (kN)	M.F. Nó In. (kN.m)	M.F. Nó F (kN.m)
1	0.00000	-1.9781e-3	18.750	0.000	1	18.750	-8.750	-0.000	13.750
2	-0.17724	-1.3926e-3	0.000	0.000	2	8.750	1.250	-13.750	17.500
3	-0.25637	-1.4243e-4	0.000	0.000	3	-1.250	11.250	-17.500	11.250
4	-0.20889	1.0128e-3	0.000	0.000	4	-11.250	21.250	-11.250	-5.000
5	-0.08229	1.3135e-3	0.000	0.000	5	-21.250	31.250	5.000	-31.250
6	0.00000	-3.9031e-3	62.500	0.000	6	31.250	-21.250	31.250	-5.000
7	-0.08229	-1.3135e-3	0.000	0.000	7	21.250	-11.250	5.000	11.250
8	-0.20889	-1.0128e-3	0.000	0.000	8	11.250	-1.250	-11.250	17.500
9	-0.25637	1.4243e-4	0.000	0.000	9	1.250	8.750	-17.500	13.750
10	-0.17724	1.3926e-3	0.000	0.000	10	-8.750	18.750	-13.750	0.000
11	0.00000	1.9781e-3	18.750	0.000					

Gerar arquivo de texto Exportar para Excel Sobre a convenção de sinais Voltar Fechar

Figura 4.3 – Janela de resultados do programa AVSer

4.2 Estrutura interna

A estrutura interna do programa é dividida em três módulos. O Módulo 1 contém as rotinas de programação referentes a entrada e saída de dados.

O Módulo 2 contém as rotinas de cálculo referentes às opções de cálculo da rigidez EI . É estruturado por meio de uma rotina principal onde são verificadas as opções de cálculo solicitadas pelo usuário, referentes à rigidez EI (métodos simplificados e método refinado) e também quanto à opção de estudo com carga incremental.

No Módulo 3 estão as rotinas referentes à resolução da viga pela teoria da Análise Matricial, onde são calculadas as reações de apoio, os deslocamentos verticais (flecha) e rotação dos nós, e os esforços atuantes nas extremidades das barras, conforme discretização da viga. Utiliza-se a Técnica da Reordenação e adota-se o Método de Gauss para resolução do sistema de equações (LA ROVERE, 2009). Este módulo foi o primeiro a ser concluído e foi desenvolvido dentro da disciplina “Tópicos especiais – elaboração de programas para análise e projeto de

estruturas”, (LORIGGIO, 2009). A seguir está um fluxograma que representa o processo de cálculo pelas rotinas dentro do Módulo 3.

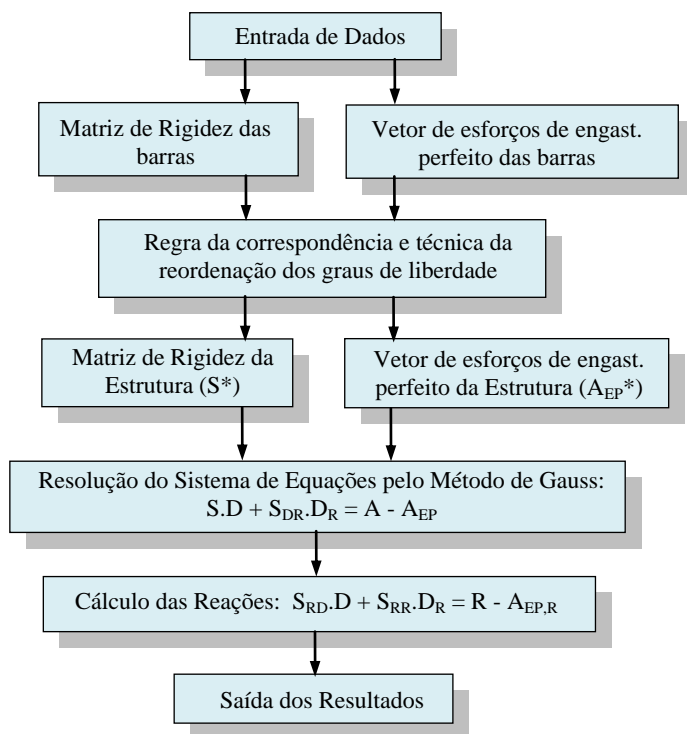


Figura 4.4 - Fluxograma do módulo de resolução de vigas hiperestáticas pela análise matricial (módulo 3)

No próximo fluxograma está ilustrado o procedimento de cálculo que o programa segue para resolução de uma viga pelo modelo refinado usando Branson ou o método Bilinear.

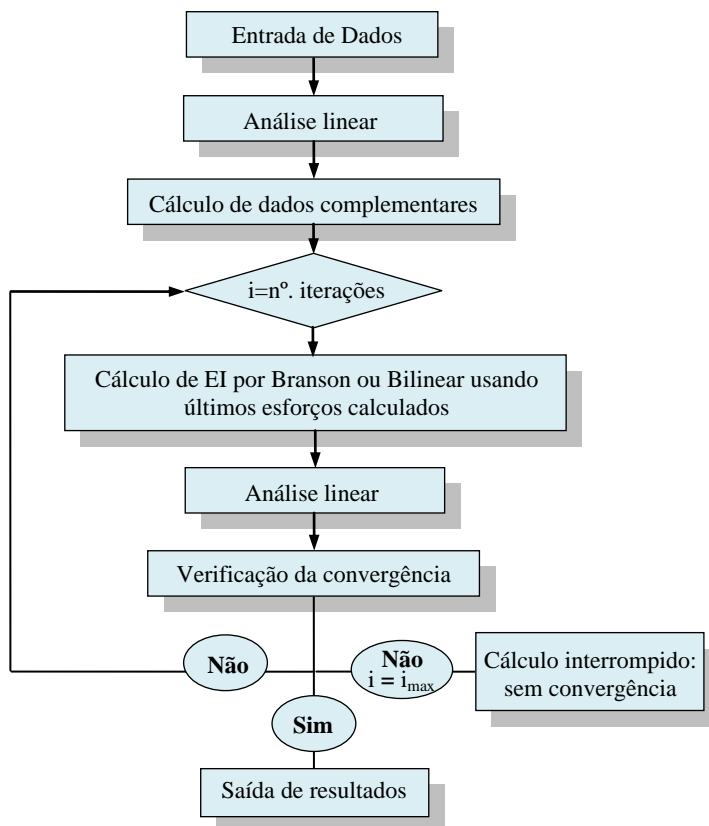


Figura 4.5 – Fluxograma de cálculo pelo Modelo Refinado de Barras

O programa também disponibiliza no menu *Ajuda – Orientações Gerais* as informações necessárias para que o usuário faça um correto uso do programa.

5 ESTUDOS PARAMÉTRICOS

Após a implementação computacional dos métodos simplificados e modelo de barras no programa AVSer, foram realizados alguns estudos paramétricos necessários para a melhor realização dos estudos.

Para o método refinado de barras utilizando Branson (MEV-Branson) e o Bilinear (MEV-Bilinear) e também para o modelo implementado no Analest, foi realizado inicialmente um estudo de malha. Para o modelo MEV-Branson, além desse estudo, investigou-se a variação do coeficiente da fórmula de Branson ($m=3/m=4$), e realizou-se também um estudo comparativo entre as duas formas de cálculo de EI_{eq} . Para o método bilinear realizou-se um estudo comparativo entre as flechas calculadas para diferentes vigas utilizando as propriedades do concreto e momento de fissuração conforme a NBR 6118 e segundo o CEB. A seguir estão dispostos os resultados destes estudos realizados utilizando os programas AVSer e ANALEST.

5.1 Estudo de Malha

Este estudo de malha tem como objetivo verificar o número de elementos em que o vão da viga é discretizado, necessário para se obter os melhores resultados dos modelos refinados.

O exemplo utilizado é uma viga contínua simétrica de dois vãos submetida a um carregamento de serviço (combinação quase permanente CQP) com carga uniformemente distribuída, denominada VC1. A geometria, carregamento e armação estão ilustrados na figura abaixo, sendo a armação detalhada de forma simplificada, de maneira a permitir o uso de uma malha mais grossa inicialmente.

Os dados dos materiais estão indicados nas tabelas 5.1 e 5.2. A resistência média do concreto à compressão (f_{cm}), utilizado no cálculo pelo modelo do Analest, é estimada em função da resistência característica do concreto (f_{ck}) como indicado na NBR 12655/1996 Concreto - Preparo, controle e recebimento. A resistência média à tração do concreto ($f_{ct,m}$) é calculada pela fórmula 2.2, o módulo de elasticidade secante (E_{cs}) pela fórmula 2.8 e o momento crítico (M_c) é calculado pela fórmula 2.1. A seção para o modelo Analest é discretizada em 20 camadas e o efeito “tension-stiffening” é aplicado em 5 camadas ($h_e=h/4$), sendo as 5 camadas inferiores no caso de armadura positiva e as 5 superiores no caso de negativa.

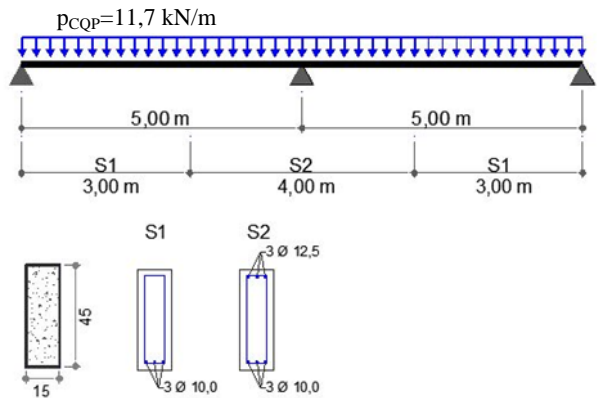


Figura 5.1 – Geometria, armação e carregamento da viga VC-1

Tabela 5.1 – Dados da seção/viga e propriedades do concreto

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)	Vão fissurado %	α
25	31.6	2.565	23800	0.002	19.48	28.0	0.04688/ 0.06237

Tabela 5.2 – Propriedades do aço

f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
500	210000	0.02	0.001

As propriedades do aço da armadura longitudinal indicadas na tabela acima são iguais para todas as vigas teóricas estudadas.

A viga foi discretizada usando-se cinco malhas diferentes, aumentando a cada malha o número de elementos por vão, conforme mostra a figura 5.2.

Os resultados obtidos por cada malha e para cada modelo são comparados a partir de gráficos que apresentam a relação carga-flecha para o ponto situado a 2,0 m a partir do apoio externo e também por meio de gráfico com os resultados das flechas para a carga total de serviço calculadas para cada malha ao longo de toda a viga.

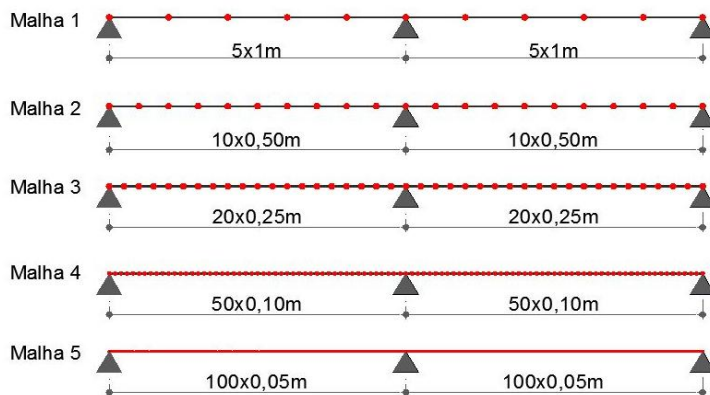


Figura 5.2 – Definição das malhas da viga VC1

Na figura 5.3 estão os resultados de cada malha para o modelo MEV-Branson com expoente $m=3$ calculado com momento fletor médio atuante na barra.

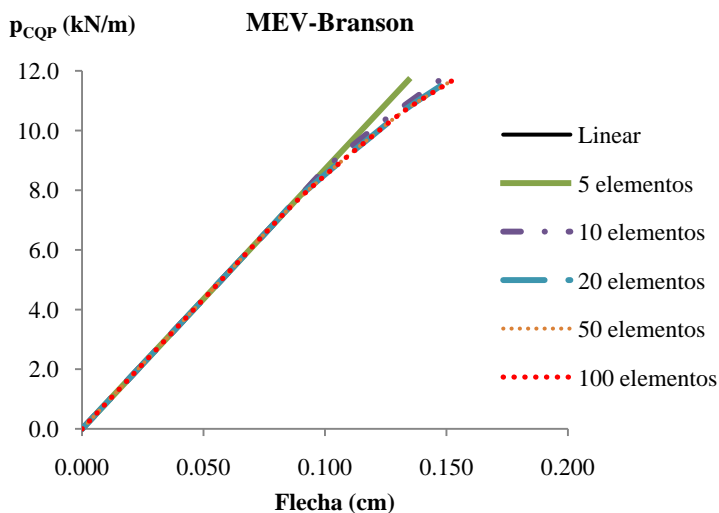


Figura 5.3 – Gráfico carga-flecha do MEV-Branson para cada malha da VC1

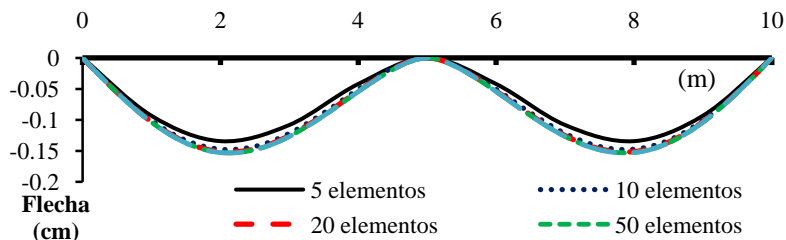


Figura 5.4 – Gráfico flecha-viga do MEV-Branson para cada malha da VC1

Os próximos gráficos mostram os resultados para o modelo de elementos de vigas usando o Método Bilinear (MEV-Bilinear).

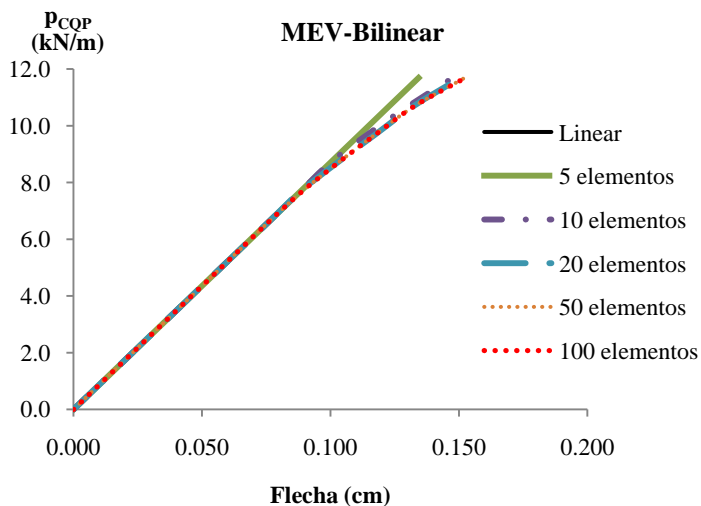


Figura 5.5 – Gráfico carga-flecha do MEV-Bilinear para cada malha da VC1

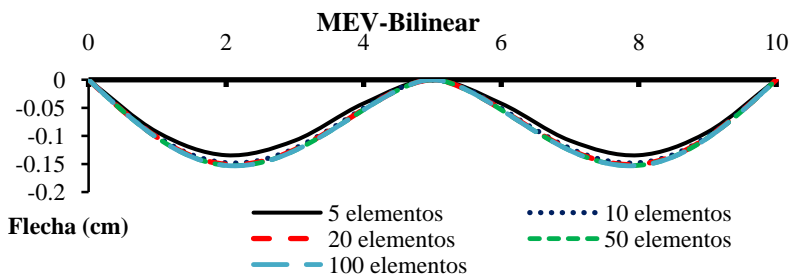


Figura 5.6 - Gráfico flecha-viga do MEV-Bilinear para cada malha da VC1

A viga VC1 também foi calculada para cada malha usando o modelo de elementos finitos implementado no Analest. O resultado comparativo entre malhas pode ser visto no gráfico a seguir.

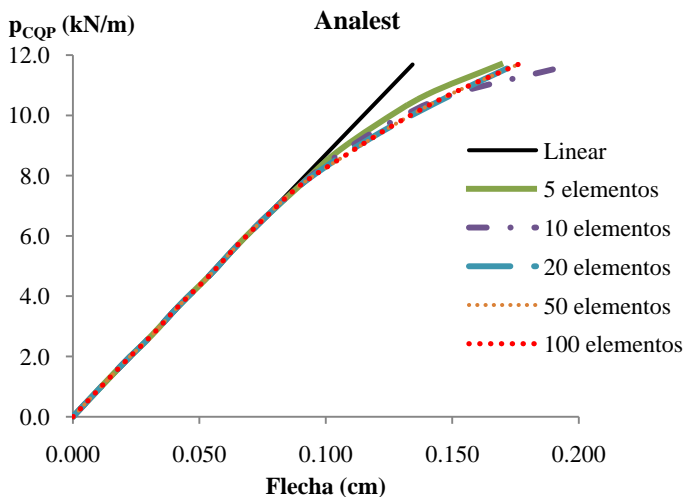


Figura 5.7 - Gráfico carga-flecha do modelo do Analest para cada malha da viga VC1

Analisando os resultados das flechas obtidas para a carga final para o MEV-Branson, percebe-se que a partir da malha 2 (20 elementos) os resultados começam a convergir, e a malha 3 (50 elementos) já apresenta pouquíssima diferença em relação à malha mais refinada.

Tabela 5.3 - Diferença percentual entre malhas do MEV-Branson

	Flecha (cm)	Diferença %	
		em relação à próxima malha	em relação à Malha 5
Malha 1 (5 elem.)	0.1343	-8.76	-12.05
Malha 2 (10 elem.)	0.1472	-2.62	-3.60
Malha 3 (20 elem.)	0.1511	-0.85	-1.01
Malha 4 (50 elem.)	0.1524	-0.16	-0.16
Malha 5 (100 elem.)	0.1527	-	-

A próxima tabela mostra os resultados do MEV-Bilinear, que também apresentou resultados com pequena diferença em relação à malha mais refinada a partir da malha com 20 elementos.

Tabela 5.4 – Diferença percentual entre malhas para o MEV-Bilinear

	Flecha (cm)	Diferença %	
		em relação à próxima malha	em relação à Malha 5
Malha 1 (5 elem.)	0.1343	-9.04	-11.92
Malha 2 (10 elem.)	0.1476	-1.94	-3.17
Malha 3 (20 elem.)	0.1506	-1.09	-1.25
Malha 4 (50 elem.)	0.1522	-0.16	-0.16
Malha 5 (100 elem.)	0.1525	-	-

Os resultados para o modelo de elementos finitos obtidos pelo programa Analest mostram resultados convergentes a partir da malha 3 (20 elementos) como pode ser visto na tabela 5.5.

Stramandinoli (2007) também realizou um estudo de malha para o modelo do Analest utilizando uma viga biapoiada submetida à carga concentrada, onde os resultados começaram a convergir para um mesmo valor a partir da malha de 10 elementos.

Tabela 5.5 – Diferença percentual entre malhas para o Analest

	Flecha (cm)	Diferença %	
		em relação à próxima malha	em relação à Malha 5
Malha 1 (5 elem.)	0.169	-14.65	-3.98
Malha 2 (10 elem.)	0.198	13.14	12.50
Malha 3 (20 elem.)	0.175	-0.57	-0.57
Malha 4 (50 elem.)	0.176	0.00	0.00
Malha 5 (100 elem.)	0.176	-	-

Por este estudo pode-se concluir que o uso de malhas com mais de 20 elementos por vão é satisfatória para o cálculo de vigas pelos modelos analisados.

5.2 Estudo do Expoente da Fórmula de Branson

A fórmula de Branson para o cálculo da rigidez equivalente, indicada pela NBR 6118/2007, utiliza o expoente $m=3$. Este expoente pode também ser adotado como $m=4$ no caso de cálculo de uma seção individual, em um modelo numérico mais refinado, que é o caso do modelo de elementos de viga proposto. Quando se utiliza o expoente $m=4$ numa seção individual, tem-se como objetivo desconsiderar o efeito de que parte do vão está ainda no estágio I, já que está se analisando um elemento de pequena extensão. Para avaliar a diferença dos resultados quando se utiliza um expoente ou outro para o modelo refinado, realizou-se o estudo comparativo descrito a seguir.

Primeiramente foi estudada a viga VC1 do estudo de malha, adotando a malha com 50 elementos por vão. Os resultados estão mostrados nos gráficos a seguir pela relação carga-flecha e flecha ao longo da viga.

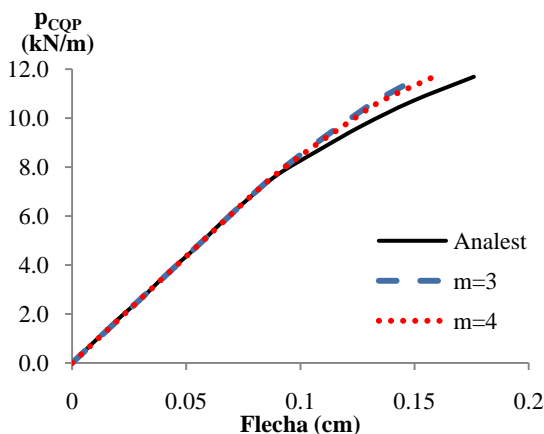


Figura 5.8 – Gráfico carga-flecha: estudo do expoente da fórmula de Branson da viga VC1

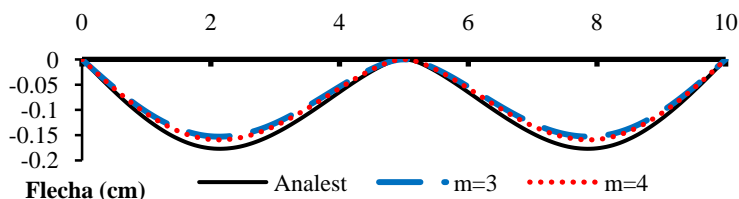


Figura 5.9 – Flecha ao longo da viga VC1: estudo do expoente da fórmula de Branson

Para uma melhor análise, os resultados foram comparados com os obtidos pelo Analest. Pôde-se observar que o MEV-Branson com $m=4$ apresentou resultados maiores do que o com $m=3$, aproximando-se mais dos valores obtidos pelo modelo do Analest.

Outros quatro exemplos de vigas biapoiadas também foram calculadas usando os dois expoentes; as vigas são do grupo VB-G21 estudadas para os diversos métodos no capítulo 6, sendo que os materiais têm as mesmas propriedades da viga VC1 mostrada anteriormente. As vigas possuem a mesma geometria, mas carregamento e taxa de armadura longitudinal crescentes.

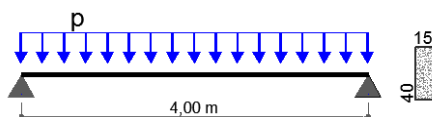


Figura 5.10 – Geometria e carregamento do grupo VB-G21.

A tabela 5.6 contém o valor da carga distribuída (p) de cada viga para a combinação de serviço, a armadura longitudinal da seção mais solicitada (meio do vão) e na última coluna a extensão do vão que está solicitado por momento fletor maior que o momento de fissuração.

Tabela 5.6 – Carregamento e armação das vigas VB-G21:

Viga	P _{COP} (kN/m)	A _s		ρ (%)	M _{COP>Mr} (% vão)
		barras	cm ²		
VB-G212	8.60	3 ϕ 10	2.36	0.39	32.25
VB-G213	12.90	4 ϕ 10	3.14	0.52	63.25
VB-G214	17.20	6 ϕ 10	4.71	0.79	74.25
VB-G216	25.80	6 ϕ 12.5	7.38	1.23	83.50

Pelos resultados expostos nos gráficos a seguir, pode-se observar que o modelo com $m=4$ apresentou a reta no trecho após a fissuração do concreto com valores de flecha maiores para um mesmo nível de carga do que o modelo com $m=3$, o que significa que a rigidez, representada pela inclinação da reta, é menor para o modelo que utiliza $m=4$. Este resultado já era esperado, visto que, como mencionado, quando se utiliza o expoente $m=3$ está sendo considerado que parte do vão, no caso elemento, ainda está no estágio I, tendo assim, uma rigidez maior, e como se analisa uma seção individual, este efeito deve ser

desconsiderado. E pôde-se observar, ainda, que os resultados do modelo com $m=4$ se aproximaram mais dos do modelo do Analest.

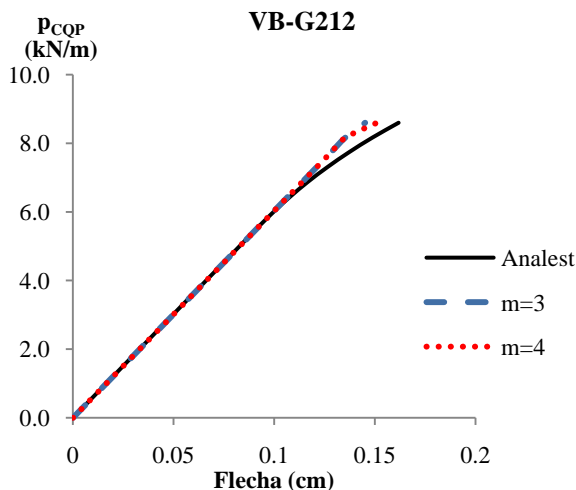


Figura 5.11 - Gráfico carga-flecha VB-G212: estudo do expoente da fórmula de Branson

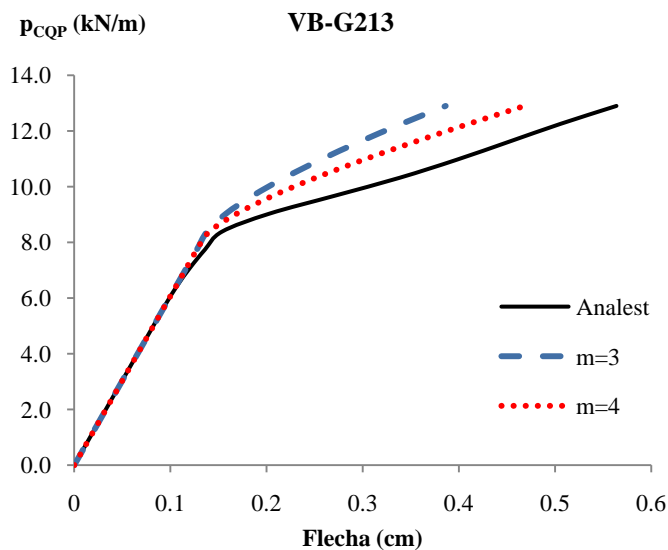


Figura 5.12 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G213: estudo do expoente da fórmula de Branson

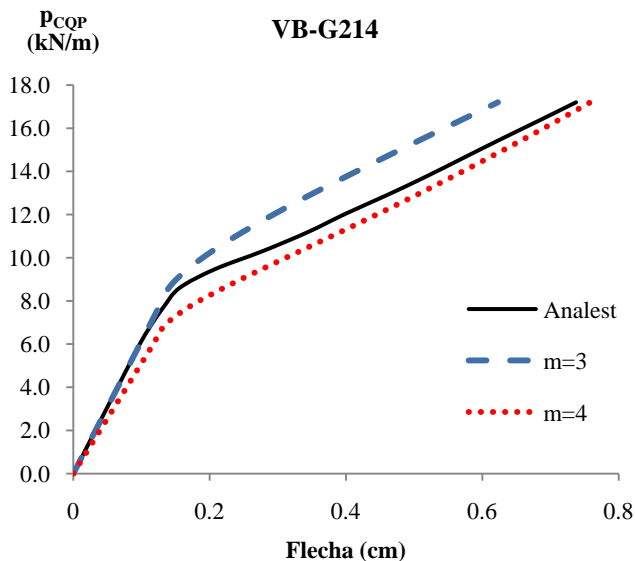


Figura 5.13 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G214: estudo do expoente da fórmula de Branson

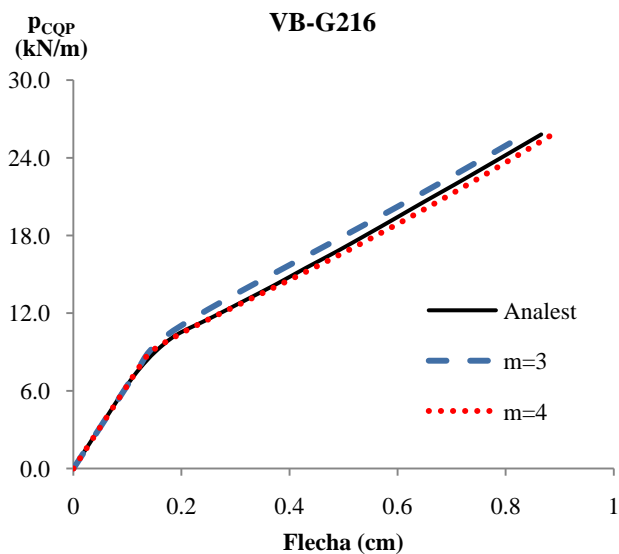


Figura 5.14 - Gráfico carga-flecha da viga VB-G216: estudo do expoente da fórmula de Branson

Na próxima tabela estão os valores das flechas obtidos para cada viga e a diferença percentual em relação aos valores calculados pelo modelo do Analest. A média na última linha foi calculada com os resultados em módulo.

Tabela 5.7 – Comparação dos resultados das flechas obtidas para as vigas do grupo VB-G21

Viga	Flecha (cm)			Diferença (%)	
	Analest	m=3	m=4	m=3	m=4
VB-G212	0.162	0.145	0.151	-10.28	-6.65
VB-G213	0.564	0.386	0.468	-31.49	-16.93
VB-G214	0.738	0.623	0.758	-15.55	2.82
VB-G216	0.866	0.836	0.887	-3.46	2.43
			Média:	15.20	7.21

Tendo como referência o modelo do Analest, para as vigas VB-G214 e VB-G216 com as maiores taxas de armadura e carregamento, o modelo com expoente $m=4$ apresentou resultados da flecha final (flecha calculada para a carga total de serviço) bem próximos aos do Analest, e, na média, apresentou a menor diferença percentual (7,2%). Já o modelo de Branson com $m=3$ mostrou-se mais rígido em relação ao modelo do Analest e, consequentemente, valores de flecha final menores, com diferença média de 15,2%.

Por meio deste estudo, pode-se verificar que o expoente da fórmula de Branson $m=4$ é o mais adequado para esse modelo de elemento de viga, MEV-Branson.

5.3 Estudo 1 EI_{eq} - 3 EI_{eq}

No modelo de elementos de vigas que utiliza a fórmula de Branson (MEV-Branson), além da opção de se alterar o expoente entre $m=3$ e $m=4$, propôs-se estudar dois métodos de se calcular o EI_{eq} de um elemento de barra. O primeiro consiste em adotar um momento fletor médio atuante na barra e então calcular o EI_{eq} e, o segundo, consiste em calcular três rigidezes equivalentes, EI_{eq} , para cada barra, nos três pontos de Gauss, conforme descrito no capítulo 3.

O objetivo de comparar os dois métodos é verificar se o cálculo por meio de três pontos permite utilizar uma malha menos refinada obtendo resultados satisfatórios. Para isso, a comparação foi feita para três malhas, as Malhas 2, 3 e 4 (10, 20 e 50 elementos respectivamente

por vão), usando a viga VC1 apresentada no estudo de malha. Os resultados carga-flecha separadas por malha estão nas três figuras seguintes onde os resultados obtidos pelo Analest também são mostrados.

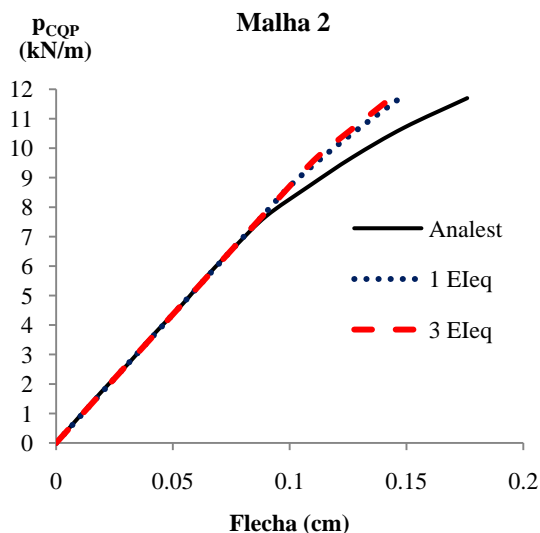


Figura 5.15 – Gráfico carga-flecha do estudo 1IEIeq/3IEIeq da viga VC1 malha 2

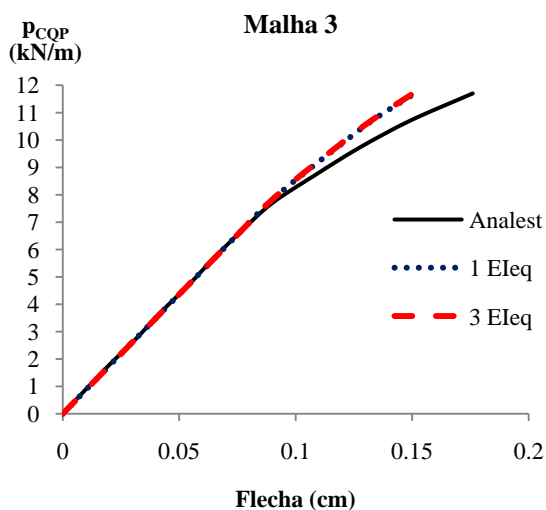


Figura 5.16 - Gráfico carga-flecha do estudo 1IEIeq/3IEIeq da viga VC1 malha 3

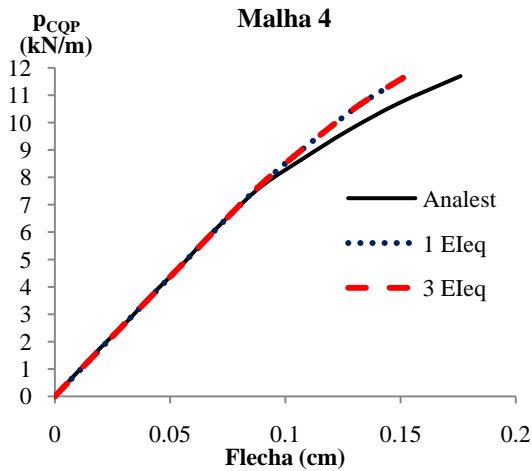


Figura 5.17 - Gráfico carga-flecha do estudo 1EIQ/3EIQ da viga VC1 malha 4

Os resultados finais para a flecha tiveram uma pequena diferença entre os dois modelos analisados apenas na malha 2, que é a menos refinada. Em relação ao número de iterações necessárias para a convergência dos resultados, o cálculo utilizando 1 EIQ apresentou-se um pouco mais econômico, como pode ser visto no quadro seguinte.

Tabela 5.8 – Número de iterações de cada malha:

Malha	Nº iterações ult. etapa		Nº iterações total	
	1 EIQ	3 EIQ	1 EIQ	3 EIQ
2	16	20	46	50
3	9	9	40	39
4	17	17	48	49

Logo, a utilização de método mais complexo para o cálculo do EIQ de cada barra não se mostrou mais eficiente em relação ao método em que se utiliza apenas um ponto para a viga estudada. Será adotado então, para os estudos realizados neste trabalho, o método de cálculo que utiliza um valor de EIQ por elemento.

5.4 Estudo paramétrico do Método Bilinear: CEB versus NBR

Para o Método Bilinear, as propriedades do concreto e momento de fissuração ($f_{ct,m}$, E_{cs} e M_r) são calculados segundo a NBR-6118/2007, conforme já mencionado no item 2.2.4, para se estudar desta forma, vigas com propriedades iguais entre os diferentes métodos e modelos estudados. Mas para verificar a influência nos resultados devido a esta alteração, realizou-se um estudo com vigas biapoiadas, comparando os resultados obtidos calculando-se as vigas pelo método adotando esses parâmetros conforme a NBR e conforme o CEB.

Primeiramente foi estudado um grupo de 5 vigas de geometria e carregamento iguais, mas com resistências à compressão, f_{ck} , diferentes, resultando, assim, em valores de $f_{ct,m}$, E_{cs} e M_r diferentes entre os calculados pelo CEB e pela NBR para cada viga. Este grupo de vigas foi também estudado para avaliar a influência da variação das propriedades do concreto nos resultados das deformações, estudo apresentado no capítulo 6, item 6.3.1, onde estão descritos a geometria e o carregamento na figura 6.17 e a armação na figura 6.18. Na próxima tabela estão as propriedades do concreto de cada viga e também o momento de fissuração M_r e a extensão do vão que está solicitada por momento maior que M_r .

Tabela 5.9– Vigas VB-fck: dados do concreto NBR/CEB

Viga	f_{ck} (MPa) NBR/CEB	$f_{ct,m}$ (MPa)		E_{ci} (MPa)		E_{cs} (MPa)		M_r (kN.m)		$M_{cor}>$ M_r (% vão)
		NBR	CEB	NBR	CEB	NBR	CEB	NBR	CEB	
VB-fck20	20	2.21	2.22	25044	30303	21287	25758	7.46	5.00	69.33
VB-fck25	25	2.56	2.58	28000	32009	23800	27208	8.66	5.80	63.00
VB-fck30	30	2.90	2.91	30672	33551	26072	28518	9.78	6.55	56.67
VB-fck35	35	3.21	3.23	33130	34962	28161	29718	10.83	7.26	50.00
VB-fck40	40	3.51	3.53	35418	36268	30105	30827	11.84	7.94	41.67

Comparando as propriedades calculadas pelo CEB e pela NBR pode-se observar que a resistência à tração $f_{ct,m}$ é aproximadamente igual, já o módulo de elasticidade secante E_{cs} apresenta uma diferença razoável, mas o que realmente divergiu foi o valor do momento de fissuração M_r , onde para o cálculo pela NBR, conforme equação 2.1, $f_{ct,m}$ é multiplicado por um coeficiente α (o qual para seções retangulares é igual a 1,5) para correlacionar de maneira aproximada a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, o que não é feito no

cálculo do momento M_r pelo CEB, resultado assim, em valores com diferença em torno de 50%. Esta diferença certamente influenciará os resultados, já que os momentos de início de fissuração para uma mesma viga são diferentes.

Os resultados obtidos calculando cada viga pelo método Bilinear-CEB e pelo método Bilinear-NBR estão mostrados a seguir pela relação carga aplicada versus flecha no meio do vão, juntamente com os resultados do modelo do Analest, usado como modelo de referência. Neste modelo utilizaram-se as mesmas propriedades do concreto f_{ck} , $f_{ct,m}$, E_{cs} , calculadas conforme a NBR, porém o momento de fissuração não é um dado de entrada do programa, tendo em vista que a seção é discretizada em camadas, admitindo-se cada camada em estado uniaxial de tensão (utilizando-se assim a resistência à tração direta, $f_{ct,m}$, como limite para início de fissuração de cada camada).

Pode-se constatar pelos gráficos que para todas as vigas a curva carga versus flecha no meio do vão obtida pelo método Bilinear-NBR se aproximou mais da curva do modelo do Analest (MA) em comparação com o método Bilinear-CEB, inclusive aproximou bem melhor o valor de carga na qual a seção entra no estágio II. Já a rigidez no trecho após o início de fissuração mostrou-se similar entre os dois modelos Bilinear, NBR e CEB, sendo um pouco maior do que a apresentada pelo MA.

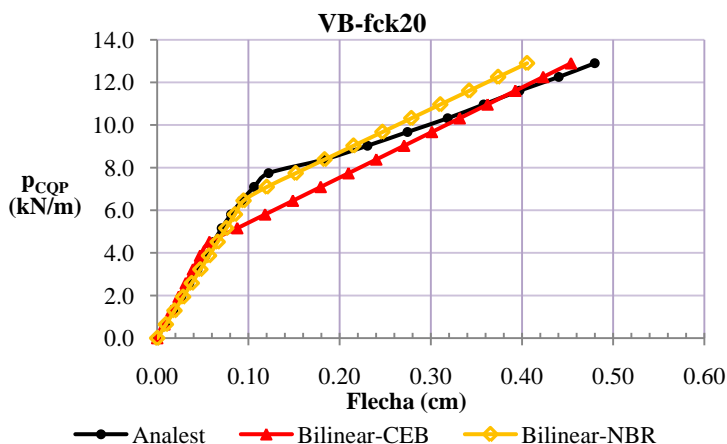


Figura 5.18 – VB-fck20: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

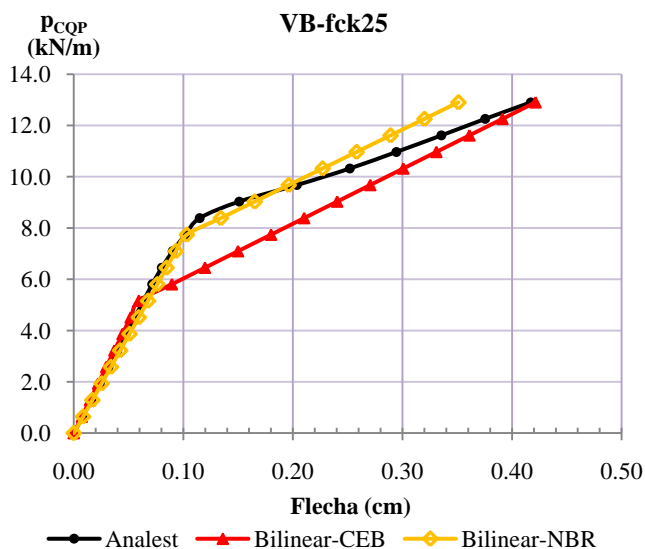


Figura 5.19 – VB-fk25: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

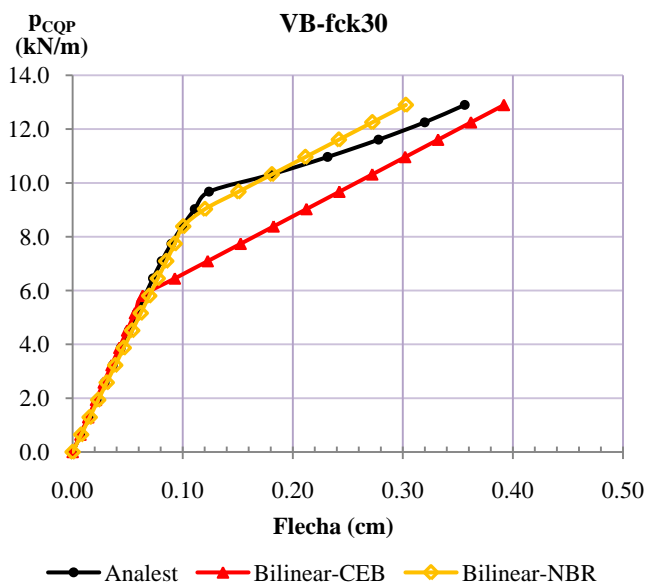


Figura 5.20 – VB-fck30: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

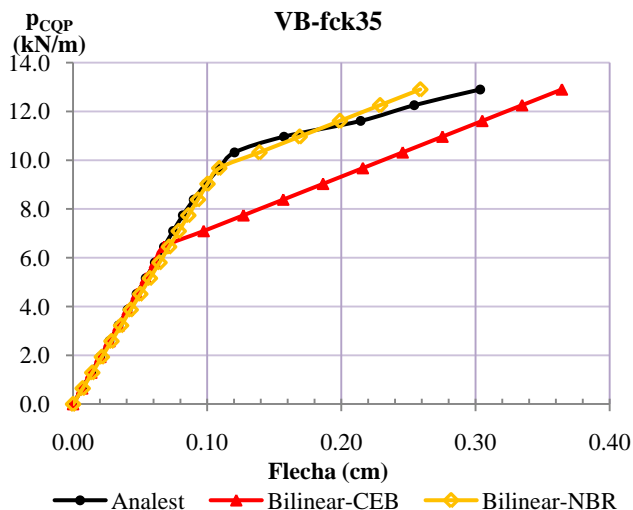


Figura 5.21 – VB-fck35: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

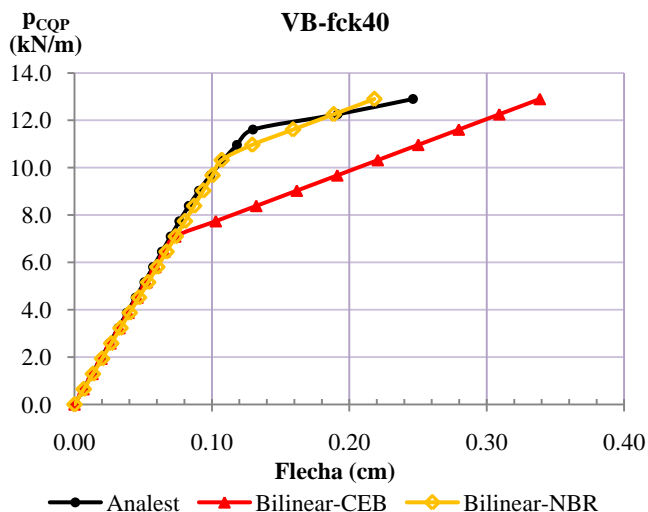


Figura 5.22 – VB-fck40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Para analisar os valores das flechas obtidas para a carga total de serviço, foram calculadas as diferenças percentuais das flechas calculadas pelos métodos Bilinear em relação às do MA, estes valores estão mostrados na próxima tabela, sendo a média na última linha calculada com os valores em módulo.

Tabela 5.10 – VB-fck: diferença percentual das flechas finais em relação às do Analest

Viga	Bilinear NBR	Bilinear CEB
VB-fck20	-15.46	-5.44
VB-fck25	-15.83	1.04
VB-fck30	-15.01	10.01
VB-fck35	-14.72	20.06
VB-fck40	-11.39	37.50
Média	14.48	14.81

Em média, os dois métodos Bilinear apresentaram variação similar em relação ao MA, mas o Bilinear-NBR apresentou em geral os menores valores de flecha, enquanto que o Bilinear-CEB apresentou valores mais elevados, e para as duas primeiras vigas valores finais bem próximos dos do modelo do Analest.

Para tornar este estudo mais completo, foram estudadas mais 4 vigas biapoiadas com geometria igual mas com carregamento diferentes, resultando também em valores de taxa de armadura diferentes e extensão do vão fissurado diferentes. Estas vigas pertencem ao subgrupo VB-G21 estudado no item 6.3.3, sendo a geometria e carregamento mostrados na figura 6.41 e o detalhamento das armaduras no Anexo A, item A.1.2.

Tabela 5.11 – Vigas VB-G21: dados do concreto NBR/CEB

Viga	f_{ck} (MPa) NBR/CEB	$f_{ct,m}$ (MPa)		E_{ci} (MPa)		E_{cs} (MPa)		M_r (kN.m)	
		NBR	CEB	NBR	CEB	NBR	CEB	NBR	CEB
VB-G21	25	2.56	2.58	28000	32009	23800	27208	15.39	10.32

Tabela 5.12 – Dados das vigas VB-G21

Viga	P_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%) A_s	$M_{COP > Mr}$ (% vão)
		barras	cm ²		
VB-G212	8.60	3 ϕ 10	2.36	0.39	32.25
VB-G213	12.90	4 ϕ 10	3.14	0.52	63.25
VB-G214	17.20	6 ϕ 10	4.71	0.79	74.25
VB-G216	25.80	6 ϕ 12.5	7.38	1.23	83.50

Os resultados obtidos para cada viga estão mostrados nos gráficos carga aplicada versus flecha no meio do vão dispostos a seguir.

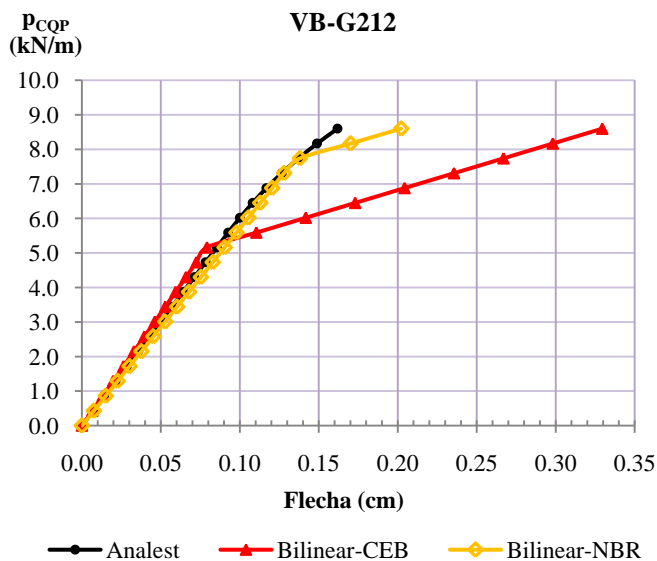


Figura 5.23 – VB-G212: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

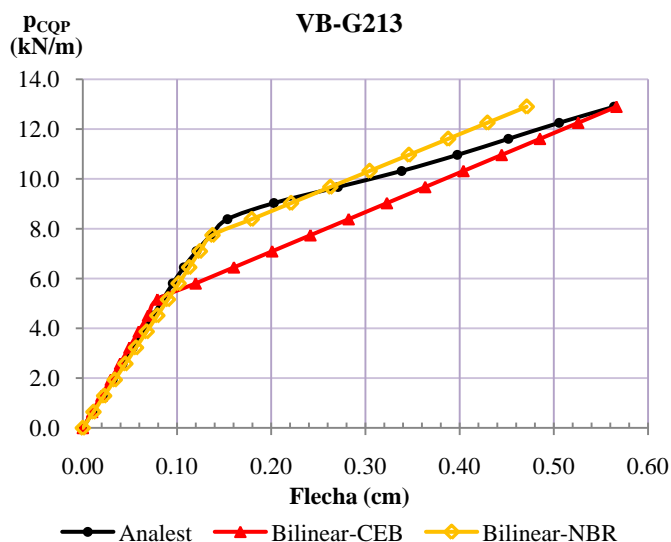


Figura 5.24 – VB-G213: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

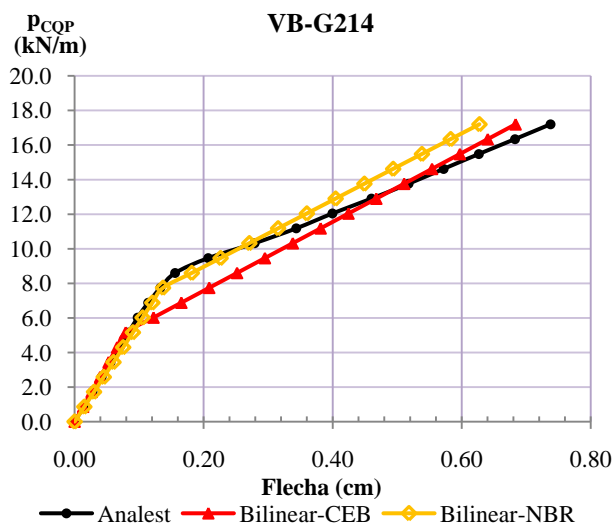


Figura 5.25 – VB-G214: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

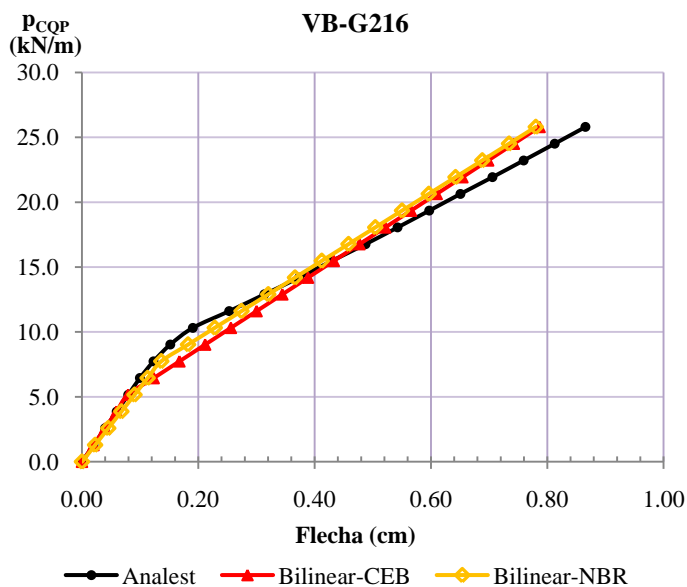


Figura 5.26 – VB-G216: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Novamente, pode-se afirmar que o Bilinear-NBR mostrou a curva carga-flecha que mais se aproximou do modelo refinado do Analest, principalmente em relação à carga em que a seção analisada entra no estágio II de comportamento. O Bilinear-CEB apresentou este valor bem menor que do Bilinear-NBR, fato este devido aos valores diferentes do momento de fissuração M_r adotados. Pode-se observar também que esta diferença nos gráficos decresce da viga menos fissurada (VB-G212) até a mais fissurada (VB-G216) devido ao fato de o concreto, com o aumento de sua fissuração, diminuir sua contribuição para a rigidez da viga.

Em relação aos valores de flechas para a carga total de serviço, pode-se observar que houve variação de uma viga para outra. Na viga VB-G212, a menos fissurada, o Bilinear-CEB obteve flecha final 100% maior que do Analest, enquanto que o Bilinear-NBR 25% maior. As flechas obtidas pelo Bilinear-NBR, com exceção da VB-G212, foram menores que as do modelo do Analest.

Tabela 5.13 – Vigas VB-G21: diferença percentual das flechas finais em relação as do Analest

Viga	Bilinear NBR	Bilinear CEB
VB-G212	24.88	103.60
VB-G213	-16.43	0.46
VB-G214	-14.94	-7.35
VB-G216	-9.87	-9.11
Média	16.53	30.13

Pelas vigas estudadas pode-se então concluir que o método Bilinear utilizando as propriedades do concreto conforme a NBR 6118 apresentou comportamento da curva/reta carga-flecha mais similar ao do modelo do Analest do que o Bilinear conforme o CEB. Em relação aos valores das flechas finais, o Bilinear-NBR mostrou, em geral, os menores resultados, e para vigas pouco fissuradas o Bilinear-CEB apresentou valores bem maiores que os do Analest e Bilinear-NBR.

Diante dos resultados obtidos e visando realizar uma comparação entre métodos, levando-se em conta que os estudos abrangem também vigas com resultados experimentais sendo muitas propriedades obtidas experimentalmente, devendo-se utilizar assim os mesmos valores para todos os métodos e modelos, optou-se por estudar

o método Bilinear com as propriedades do concreto calculadas conforme a NBR 6118, adotando assim, os mesmos valores para os diferentes modelos e métodos estudados para uma mesma viga. O mesmo procedimento foi adotado para o MEV-Bilinear.

6 VIGAS BIAPOIADAS

6.1 Descrição dos estudos

Devido à falta de disponibilidade de resultados de vigas de concreto armado ensaiadas experimentalmente suficientes para se realizar um estudo abrangente de flechas imediatas, e querendo também avaliar os valores de flecha obtidos para vigas variando-se a geometria e tipo de carregamento, optou-se nesse trabalho por utilizar exemplos de vigas de projeto, não ensaiadas experimentalmente. Para isso, foi necessário adotar como referência um dos modelos estudados para a comparação dos resultados entre os métodos e modelos analisados. O modelo de elementos finitos descrito no item 3.2.2, desenvolvido por Stramandinoli (2007) e implementado no programa Analest, foi o modelo escolhido por levar em conta as não linearidades do concreto com maior rigor, e por já ter apresentado bons resultados em comparação com ensaios experimentais para diversos exemplos de vigas e pórticos planos de concreto armado. No entanto, para demonstrar neste trabalho que os resultados obtidos por esse modelo refinado podem servir como referência para o estudo comparativo, serão analisados mais alguns exemplos de vigas ensaiadas experimentalmente, em que os resultados dos deslocamentos obtidos pelo modelo do Analest são comparados aos resultados experimentais. Para algumas destas vigas também serão comparados os valores de deslocamentos obtidos pelos métodos simplificados (ver item 2.2) e pelos modelos de elementos de viga (ver item 3.3) com os obtidos experimentalmente.

Após a avaliação do modelo refinado, inicia-se o estudo de comparação entre os métodos e modelos de cálculo de flecha imediata para os exemplos teóricos. Os resultados obtidos pelos métodos simplificados e pelo modelo de elementos de viga implementados no programa AVSer são comparados com os obtidos pelo modelo do programa Analest. Neste capítulo são estudadas vigas biapoiadas e, no capítulo 7, vigas contínuas.

Todas as vigas teóricas, biapoiadas e contínuas, foram dimensionadas, tanto a geometria como as armaduras longitudinais de flexão, de forma a garantir um comportamento predominantemente de flexão, até a ruptura, atendendo ao estado limite último (ELU) e também ao estado limite de abertura de fissuras (ELS-W). As armaduras longitudinais das vigas foram dimensionadas atendendo à recomendação da NBR 6118/2007 limitando a posição da linha neutra a $x/d \leq 0,50$ (para $f_{ck} \leq 35$ MPa) para garantir a ductilidade, sendo dimensionadas então, no

domínio 3 de comportamento da seção no ELU, onde a ruptura da peça ocorre com o escoamento da armadura e esmagamento do concreto. De forma a simplificar os estudos, foram detalhadas somente as armaduras longitudinais conforme o dimensionamento ao ELU de cada viga, portanto, não foram detalhadas nem as armaduras de cisalhamento e nem as armaduras construtivas.

As vigas teóricas estão separadas em grupos, sendo que as vigas de um mesmo grupo possuem a mesma geometria e propriedades dos materiais. Dentro de cada grupo, há os subgrupos, sendo que as vigas de cada subgrupo estão submetidas a carregamento crescente da primeira viga para a próxima até a última do grupo, ou seja, a primeira viga está submetida ao menor valor de carregamento do grupo, e a última ao maior, o que leva a terem taxa de armadura longitudinal também crescente de uma viga para a próxima, até a última do subgrupo, conforme dimensionamento no ELU.

De acordo com a NBR 6118/2007 item 11.8.3, para a verificação do estado limite de serviço de deformação excessiva (ELS-DEF) utiliza-se a combinação quase permanente de serviço (CQP) das ações solicitantes na viga. Sendo assim, as vigas são dimensionadas para a combinação última, e têm suas flechas avaliadas para a combinação quase permanente de serviço.

Inicialmente foram estudados exemplos de vigas biapoizadas, variando as características geométricas, tipo de carregamento e taxa de armadura, cujos resultados são mostrados neste capítulo. Em seguida, iniciaram-se os estudos das vigas contínuas de dois vãos, abrangendo diversos exemplos, variando da mesma forma as suas características. Também foram estudados alguns exemplos de vigas contínuas de três vãos com geometria e carregamento simétricos. Os resultados das vigas contínuas estão no capítulo 7. No próximo item apresenta-se a comparação entre resultados numéricos e os obtidos de ensaios de vigas de concreto armado, com ênfase no modelo refinado do programa ANALEST.

6.2 Vigas biapoizadas: comparação entre resultados numéricos e experimentais

Para avaliar neste trabalho os resultados do modelo refinado do Analest, que será adotado como referência na comparação dos resultados dos diferentes modelos e métodos estudados, mais alguns exemplos de vigas ensaiadas experimentalmente foram analisados (além dos exemplos analisados anteriormente por Stramandinoli (2007)),

comparando-se os resultados do modelo do Analest aos obtidos experimentalmente. A seguir estão mostrados os resultados obtidos para os exemplos de vigas biapoias analisados, separados por autor. Para algumas dessas vigas compararam-se também os resultados de deslocamentos obtidos pelos outros métodos/modelos estudados com os resultados experimentais.

Quando as propriedades do concreto não forem obtidas experimentalmente nos ensaios, estas serão estimadas usando-se equações contidas em normas. A resistência à tração média, f_{cm} , é calculada pela equação 2.2, sendo primeiramente estimado o valor da resistência característica à compressão, f_{ck} , a partir do valor da resistência à compressão média, f_{cm} . No modelo do ANALEST adota-se a curva do CEB para o concreto comprimido, sendo que quando a rigidez inicial E_{ci} não for obtida experimentalmente, será calculada conforme equação 3.78. Para todos os modelos e métodos foram utilizadas as mesmas propriedades dos materiais para cada viga analisada.

6.2.1 Viga ensaiada por Machado (2004)

A viga VR ensaiada por Machado (2004) tem geometria e armação conforme ilustram as figuras a seguir e nas tabelas 6.1 e 6.2 estão os dados dos materiais, onde os valores em negrito foram obtidos experimentalmente.

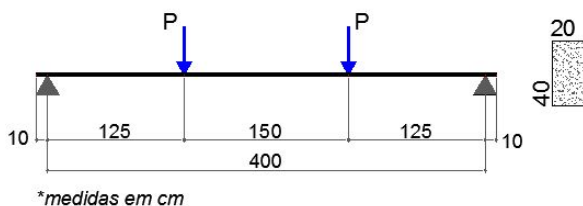


Figura 6.1 - Geometria da viga VR.

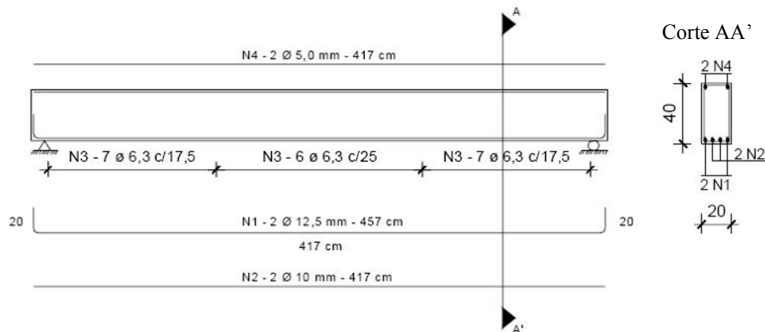


Figura 6.2 - Armadura da viga VR (MACHADO, 2004)

Tabela 6.1 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga VR

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	α (em 5 camadas)	n° camadas
22.1	2.52	27460	0.002	0.053757	20

Tabela 6.2 – Propriedades do aço da viga VR

ϕ	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
5 mm	696.69	214200	0.006	0.01
10 mm	541.82	203200	0.07	0.1
12.5 mm	534.41	211710	0.02	0.1

A viga foi ensaiada até atingir a ruptura. Os resultados, em termos de curvas carga aplicada versus flecha no meio do vão, obtidos experimentalmente e pelo Analest estão mostrados na figura 6.3.

Analisando o gráfico percebe-se a proximidade entre os resultados do Analest com os experimentais, principalmente no trecho antes do escoamento, que é o trecho que interessa neste estudo.

Também foram calculados os deslocamentos pelos demais métodos e modelos até a carga de início de escoamento do aço e comparados aos resultados experimentais (figura 6.4).

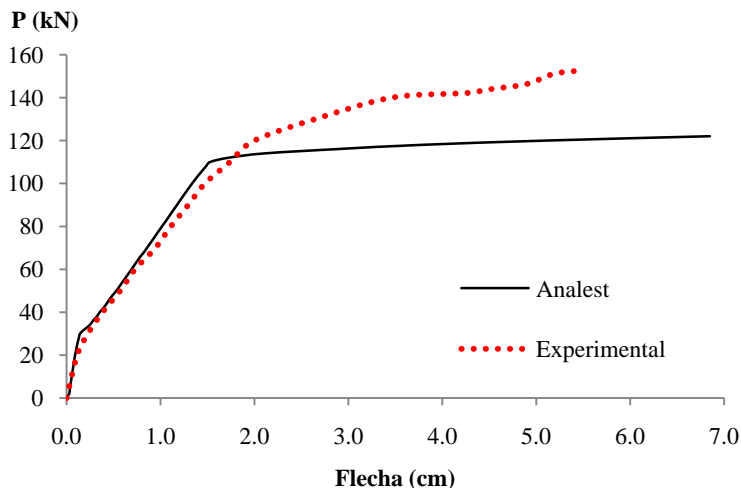


Figura 6.3 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VR.

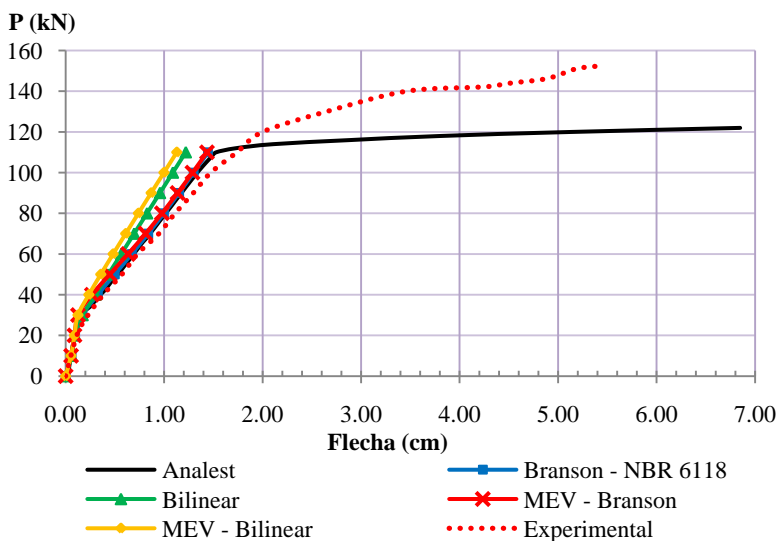


Figura 6.4 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VR para todos os modelos.

Os métodos e modelos apresentaram resultados próximos aos experimentais, sendo que o modelo MEV-Bilinear e o método Bilinear

apresentaram deslocamentos um pouco menores para o mesmo nível de carga, ou seja, apresentaram rigidez maior após a fissuração do concreto, enquanto que o MEV-Branson e o Branson-NBR tiveram seus resultados praticamente coincidentes com os do Analest, sendo os deslocamentos obtidos ligeiramente menores que os experimentais.

6.2.2 Vigas ensaiadas por Fernandes (1996)

Fernandes (1996) ensaiou três vigas biapoizadas a quatro pontos até a ruptura com geometria e materiais iguais, alterando somente a armadura longitudinal.

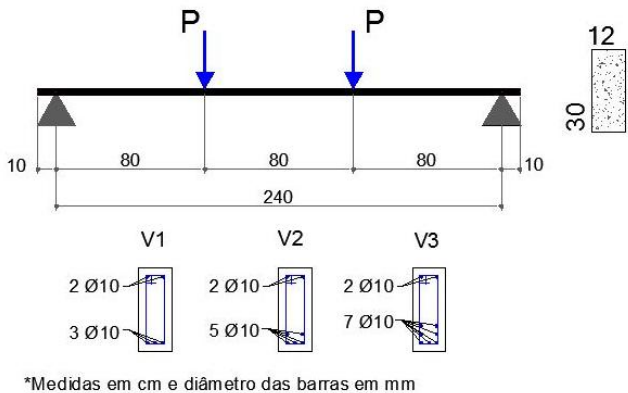


Figura 6.5 – Geometria e armação das vigas ensaiadas por Fernandes (1996).

Na figura anterior está ilustrada a geometria, configuração do carregamento e armação longitudinal das três vigas ensaiadas. Nas tabelas 6.3 e 6.4 estão os dados do concreto e aço respectivamente onde os valores em **negrito** foram obtidos experimentalmente.

Tabela 6.3 – Propriedades do Concreto e dados da seção analisada das vigas ensaiadas por Fernandes (1996)

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_c (MPa)	ϵ_0	α (em 5 camadas)			nº camadas
				V1	V2	V3	
23.93	2.009	28758	0.002	0.06223	0.08836	0.11152	20

Tabela 6.4 – Propriedades do Aço das vigas ensaiadas por Fernandes (1996)

ϕ	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
10 mm	500	210000	0.02	0.00001

Os resultados dos deslocamentos, em função de curvas carga aplicada versus flecha no meio do vão, obtidos pelo modelo do Analest para cada viga estão mostrados nos gráficos a seguir, juntamente com os resultados obtidos experimentalmente.

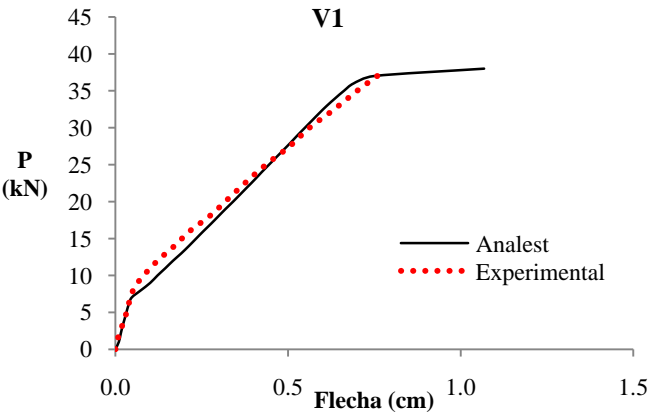


Figura 6.6 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1 ensaiada por Fernandes (1996)

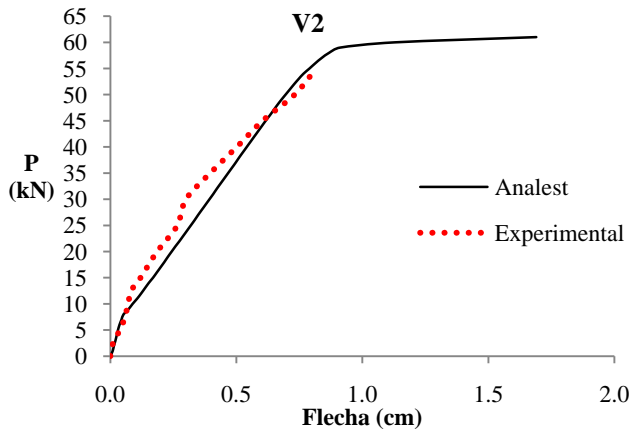


Figura 6.7 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V2 ensaiada por Fernandes (1996)

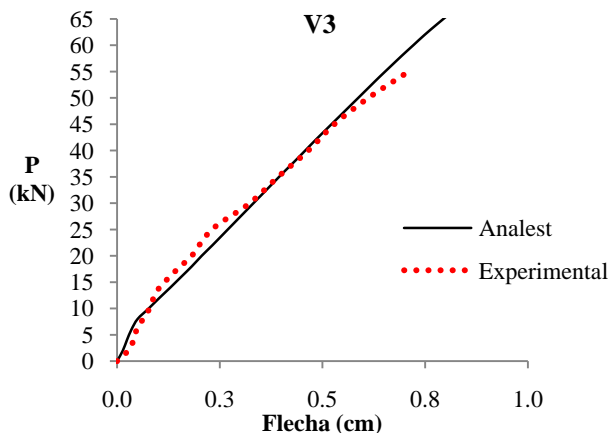


Figura 6.8 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V3 ensaiada por Fernandes (1996)

Os resultados dos deslocamentos calculados pelo Analést apresentaram pouca diferença em relação aos resultados experimentais para as três vigas analisadas, apresentando resultados divergentes somente para o trecho de escoamento até a ruptura das vigas V1 e V2. A seguir estão os resultados dos deslocamentos obtidos pelos demais métodos e modelos comparados aos resultados obtidos experimentalmente.

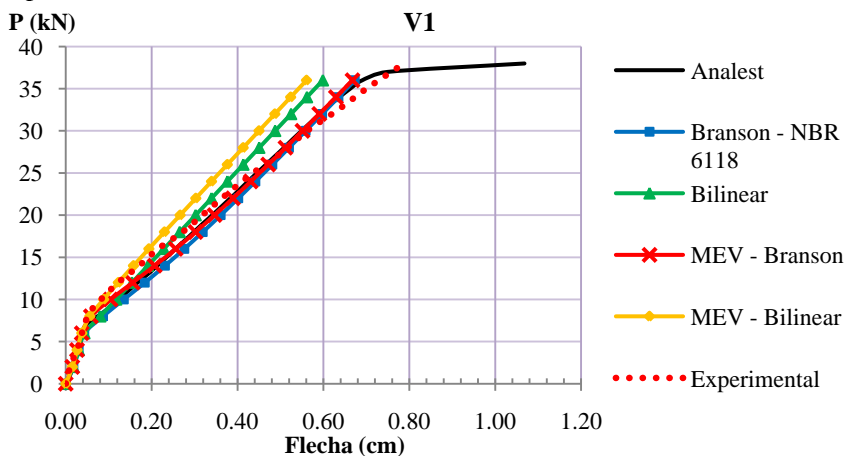


Figura 6.9 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1 para todos os modelos

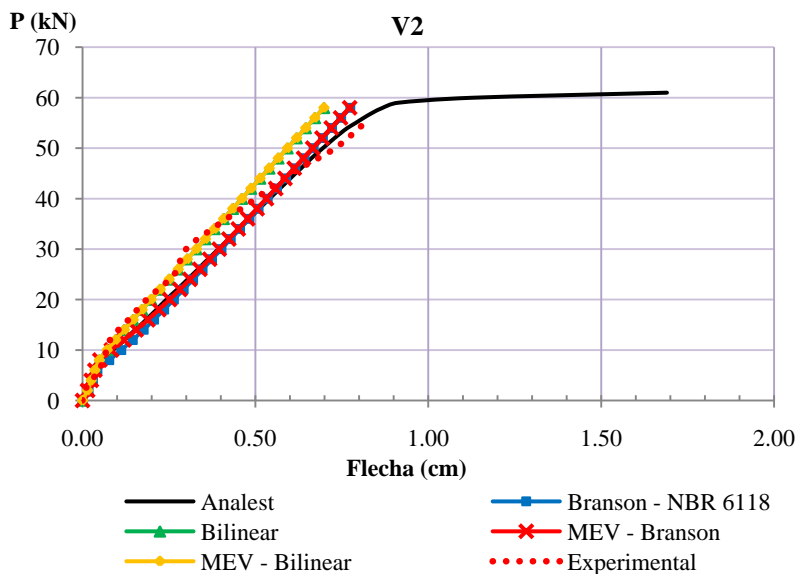


Figura 6.10 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V2 para todos os modelos

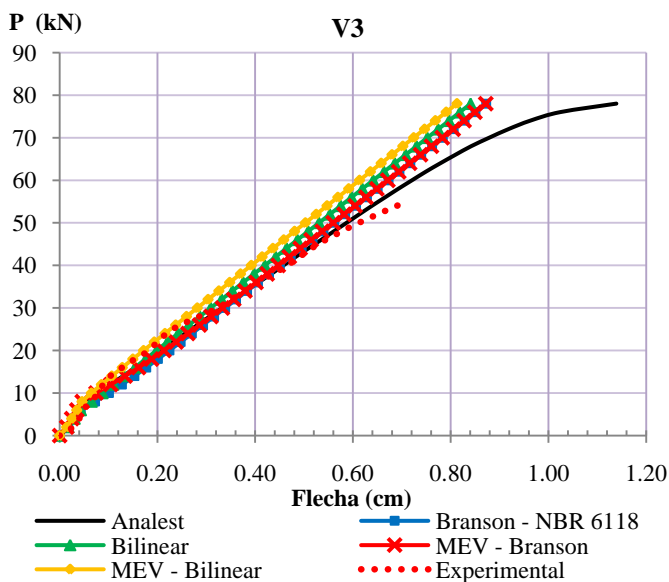


Figura 6.11 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V3 para todos os modelos

Todos os métodos e modelos apresentaram boa proximidade aos resultados experimentais, sendo que o MEV-Branson e o método simplificado Branson-NBR se aproximaram mais dos resultados experimentais e do modelo do Analest, enquanto que para todas as vigas o Método Bilinear e o MEV-Bilinear mostraram deslocamentos um pouco menores para um mesmo nível de carga aplicada, devido à maior rigidez da curva pós-fissuração. Apenas para a viga V3 o valor da carga de ruptura obtida experimentalmente apresentou grande diferença em relação aos modelos teóricos.

6.2.3 Viga ensaiada por Araújo (2002)

Os dados da viga V1B ensaiada a quatro pontos por Araújo (2002) foram obtidos em Matsui (2006). A geometria e a armação estão ilustradas na figura 6.12 e os dados dos materiais nas tabelas 6.5 e 6.6, onde os valores em **negrito** foram obtidos experimentalmente.

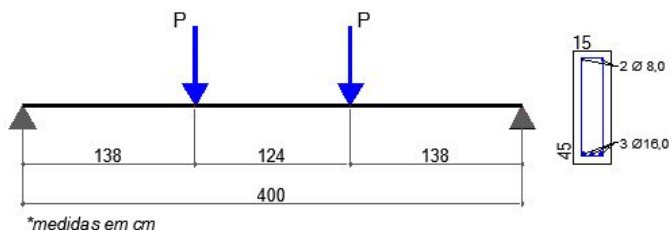


Figura 6.12 – Geometria e armação da viga V1B

Tabela 6.5 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga V1B

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_{ci} (MPa)	ϵ_0	α (em 5 camadas)	nº camadas
38.4	3.011	33667.87	0.002	0.0640155	20

Tabela 6.6 – Propriedades do aço da viga V1B

ϕ	f_y (MPa)	E_s (Mpa)	ϵ_u	s.h.
8 mm	603	188000	0.02	0.01
16 mm	567	189000	0.02	0.01

Os resultados dos deslocamentos obtidos pelo Analest apresentaram-se um pouco maiores em relação aos resultados experimentais, para um mesmo nível de carga aplicada, até o início do escoamento da seção. A partir deste ponto o modelo do Analest mostrou

resultados diferentes dos experimentais até a ruptura da viga, conforme pode ser visto na figura 6.13. Provavelmente os instrumentos de medição foram retirados para não serem danificados, por isto a curva experimental não apresentou o patamar de escoamento.

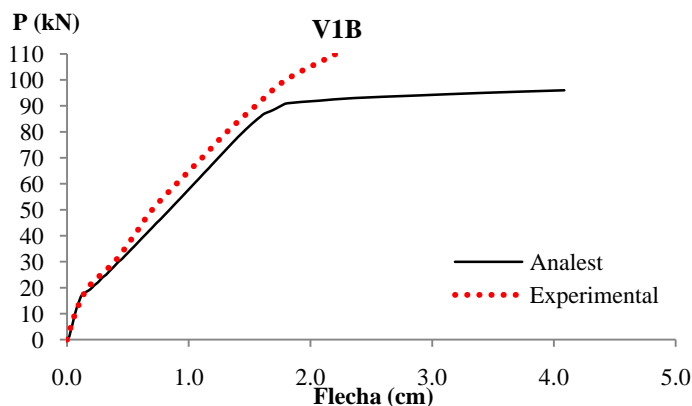


Figura 6.13 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1B

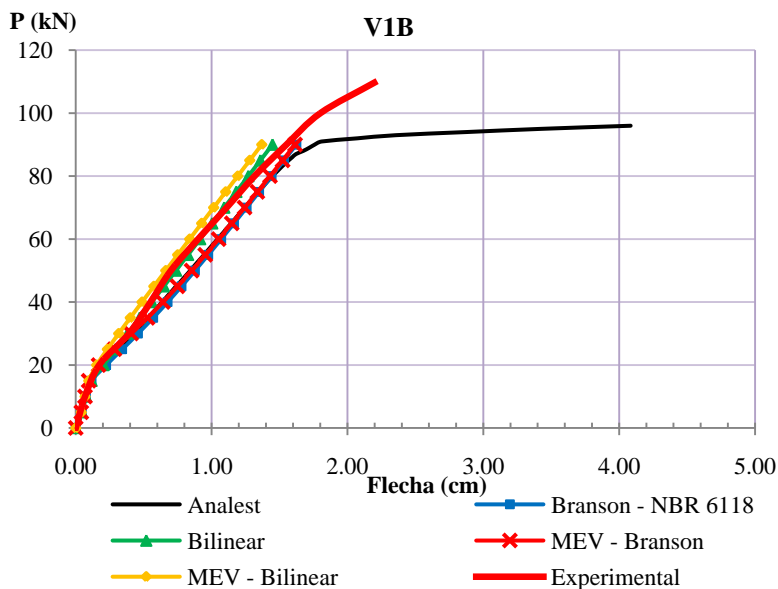


Figura 6.14 – Gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga V1B para todos os modelos

Comparando os deslocamentos obtidos pelos demais modelos e métodos aos resultados experimentais, mostrados na figura 6.14, observa-se a proximidade dos resultados, onde o método Bilinear e o MEV-Bilinear apresentaram deslocamentos um pouco menores que os obtidos experimentalmente, para um mesmo nível de carga aplicada, enquanto que o método Branson-NBR e o modelo MEV-Branson deslocamentos um pouco maiores que os experimentais, praticamente coincidentes com os do modelo do Analest.

6.2.4 Viga ensaiada por Gamino (2007)

A viga denominada REF1 foi ensaiada a quatro pontos até a sua ruptura, que se deu por flexão, e a resistência média à compressão do concreto f_{cm} e módulo de elasticidade E_c foram obtidos por meio de ensaios específicos, os quais estão mostrados na tabela 6.7. Foi utilizado aço CA-50 com barras de 6.3 mm de diâmetro.

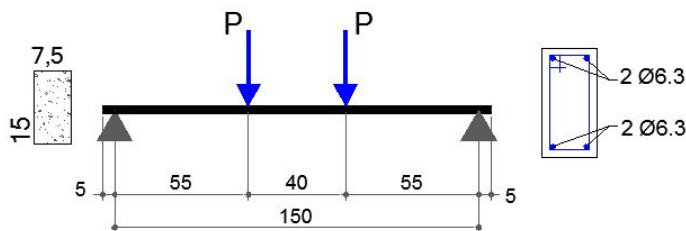


Figura 6.15 – Geometria e armação da viga REF1 ensaiada por Gamino (2007)

Tabela 6.7 – Propriedades do concreto e dados da seção analisada da viga REF1

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_c (MPa)	ϵ_0	α (em 5 camadas)	nº camadas
45	3.415	40000	0.0019	0.04598	15

Tabela 6.8 – Propriedades do aço da viga REF1

ϕ	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
6.3 mm	640	210000	0.02	0.05

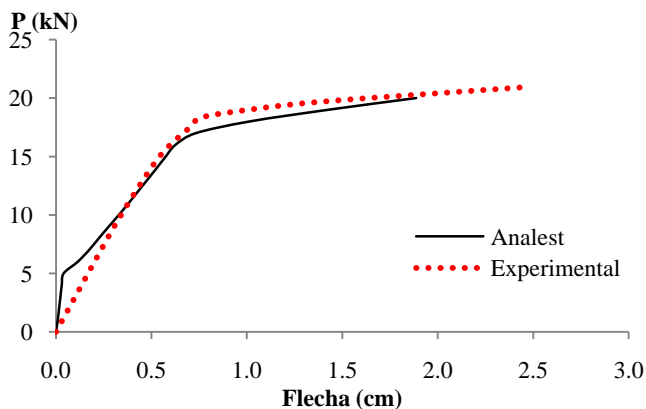


Figura 6.16 – Gráfico carga versus flecha da viga REF1

Nesta viga, o trecho inicial linear-elástico aparentemente não foi capturado durante os ensaios (ou a viga já estava fissurada no início do ensaio, ou a carga foi aplicada em ciclos inicialmente, para acomodação do protótipo, não sendo registrado o ciclo inicial); já no trecho pós-fissuração até a ruptura, a curva do Analest e a curva experimental apresentaram boa proximidade.

Deve-se fazer uma observação quanto aos diversos aspectos que influenciam na precisão de resultados experimentais, tais como dispositivos de ensaio, instrumentos usados para medição dos resultados, confecção das vigas ensaiadas, etc. Ressalta-se que os deslocamentos mostrados na curva carga-flecha experimental são em geral obtidos pela média das medições de dois LVDT's (*linear variation displacement transducer*), cada um disposto em uma das faces da viga. Por vezes a diferença entre as medições de cada LVDT é maior do que a diferença entre os resultados do modelo numérico e a média destas medições.

Outra observação importante sobre os exemplos analisados deve ser feita: como nem todas as propriedades do concreto e aço foram obtidas experimentalmente, nas análises numéricas alguns valores foram estimados seguindo recomendações de normas, os quais podem não coincidir com os valores reais da viga ensaiada, influenciando, assim, na diferença existente entre resultados experimentais e os resultados calculados pelos modelos numéricos.

Feitas estas considerações, pode-se dizer que pequenas diferenças entre resultados experimentais e resultados obtidos por modelos teóricos ocorrem e são justificáveis conforme exposto.

Entre todos os métodos e modelos, o modelo do Analest foi o que apresentou resultados mais próximos aos resultados experimentais das vigas ensaiadas por diferentes autores, principalmente até o nível de carregamento de serviço, ou seja, até o escoamento da armadura de aço, que é o trecho de interesse para os estudos. Pode-se assim comprovar que o modelo consegue representar bem o comportamento estrutural de peças de concreto armado, fornecendo valores de deslocamentos com boa precisão, definindo-se como boa precisão, valores dentro de uma faixa considerada de pequena variabilidade, lembrando que devido aos múltiplos fatores influentes, o valor estimado por um modelo teórico nunca será exato ao compará-lo ao valor que ocorre na estrutura real. Mais exemplos de vigas biapoiadas com resultados experimentais comparados aos do modelo do Analest podem ser verificados em Stamandinoli (2007).

Comprovada a “precisão” do modelo de elementos finitos do Analest, justifica-se o seu uso como referência na comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos simplificados e modelos refinados.

6.3 Vigas teóricas biapoiadas

As vigas biapoiadas estudadas estão separadas em grupos como já mencionado. Foram estudadas no total 41 vigas que estão separadas em 5 grupos onde cada grupo é dividido em 2 subgrupos que se diferenciam pelo tipo de carregamento, carga distribuída uniformemente ou carga concentrada no meio do vão.

Para todas as vigas estudadas foi adotado Aço CA-50 com as mesmas propriedades conforme tabela a seguir.

Tabela 6.9 – Propriedades do aço das vigas biapoiadas estudadas

f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
500	210000	0.02	0.001

No modelo do Analest, a seção transversal de todas as vigas foi dividida em 20 camadas, assim sendo o efeito “tension stiffening” foi considerado nas 5 camadas inferiores ($h/4$). Tanto para o modelo do Analest como para os demais modelos usados no AVSer, as vigas foram discretizadas com elementos de 10 cm a fim de facilitar o trabalho.

Para o cálculo pelo modelo MEV-Branson foi adotado o coeficiente m igual a 4 e no cálculo da rigidez equivalente EI_{eq} foi usado um único valor por elemento.

Sabe-se que o cálculo das deformações de uma viga envolve a definição prévia de muitos parâmetros que influem diretamente nos resultados obtidos. As propriedades do aço são fixas em todos os exemplos, mas a quantidade de aço (taxa de armadura longitudinal) é variável de viga para viga e também ao longo do comprimento de cada viga, sendo então um dos parâmetros que influenciam na obtenção de diferentes resultados de uma viga para outra. Outro item importante é o carregamento aplicado, que também influi nos resultados conforme combinação de carga (cargas permanentes e acidentais) e também a forma de aplicação (concentrada ou distribuída).

Ainda têm-se a variação das propriedades do concreto, que para analisar a sua influência na obtenção das deformações, realizou-se um estudo que está descrito no próximo item. A influência da variação da taxa de armadura e carregamento no cálculo das flechas pelos diferentes modelos e métodos é analisada no item 6.3.7 onde são analisados os resultados de todas as vigas teóricas biapoiadas estudadas mostradas a partir do item 6.3.2.

6.3.1 Variação da resistência à compressão, f_{ck}

Para demonstrar a influência da variação das características do concreto no cálculo dos deslocamentos verticais (flechas) estudou-se a viga VB-G113 do grupo VB-G11 (ver 6.3.2), sendo aqui denominada VB-fck, submetida a uma carga distribuída uniformemente, onde se variou a resistência à compressão, f_{ck} e consequentemente a resistência à tração, f_{ctm} , o módulo de elasticidade secante do concreto, E_{cs} e o momento de início de fissuração, M_r que são calculados em função de f_{ck} . O dimensionamento pelo ELU resultou em uma armadura longitudinal igual para todas as vigas com pequena diferença no detalhamento da armação ao longo da viga.

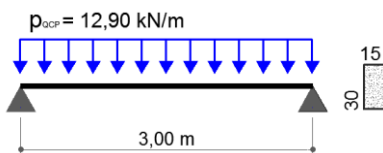


Figura 6.17 – Geometria e carregamento das vigas VB-fck

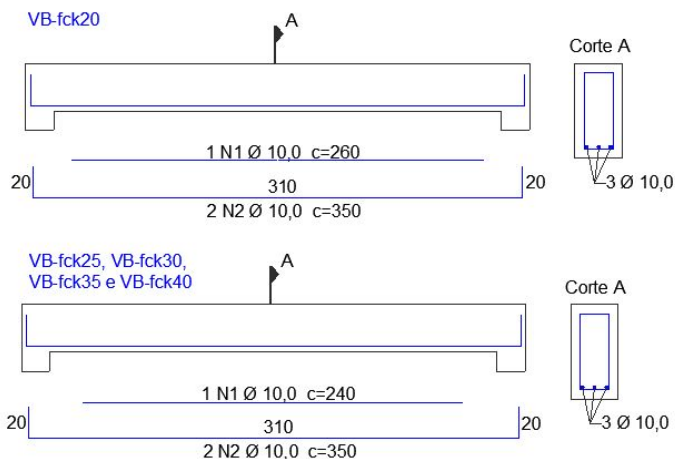


Figura 6.18 – Armadura das vigas VB-fck

Na próxima tabela estão os dados do concreto de cada viga, com o valor de f_{ck} variando entre 20 e 40 MPa.

Tabela 6.10 – Propriedades do concreto das vigas VB-fck

Viga	f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0
VB-fck20	20	26.6	2.210	21287.37	0.002
VB-fck25	25	31.6	2.565	23800.00	0.002
VB-fck30	30	36.6	2.896	26071.59	0.002
VB-fck35	35	41.6	3.210	28160.54	0.002
VB-fck40	40	46.6	3.509	30104.88	0.002

Na tabela 6.11 estão especificados o momento de início da fissuração do concreto (M_r), a porcentagem do vão que está submetido à solicitação maior que M_r ($M_{CQP} > M_r$), a porcentagem de armadura da seção central (que é a mais solicitada) calculada para a área total da seção transversal (ρ), a razão (n) entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto e o coeficiente tension stiffening α calculado em função de n e da taxa de armadura calculada para a área efetiva, usando-se a altura efetiva h_{ef} descrita no item 3.2.4.

Tabela 6.11 – Dados das vigas VB-fck

Viga	M_r (kN.m)	$M_{COP}>M_r$ (% vão)	ρ (%)	n (E_s/E_{cs})	α
VB-fck20	7.46	69.33	0.52	9.865	0.05014
VB-fck25	8.66	63.00	0.52	8.824	0.04682
VB-fck30	9.78	56.67	0.52	8.055	0.04435
VB-fck35	10.83	50.00	0.52	7.457	0.04241
VB-fck40	11.84	41.67	0.52	6.976	0.04083

O gráfico seguinte mostra os resultados de curvas carga aplicada versus flecha no meio do vão, calculados pelo modelo do Analest para cada viga. Pode-se observar a variação da flecha de viga para viga em consequência da variação do valor de f_{ck} . Como esperado, para resistências à compressão do concreto menores as deformações são maiores, pois a fissuração do concreto inicia para uma carga menor, já que a resistência à tração, f_{ctm} , é menor, mas a rigidez no trecho pós-fissuração, representada pela inclinação das curvas, é aproximadamente igual entre as vigas do grupo.

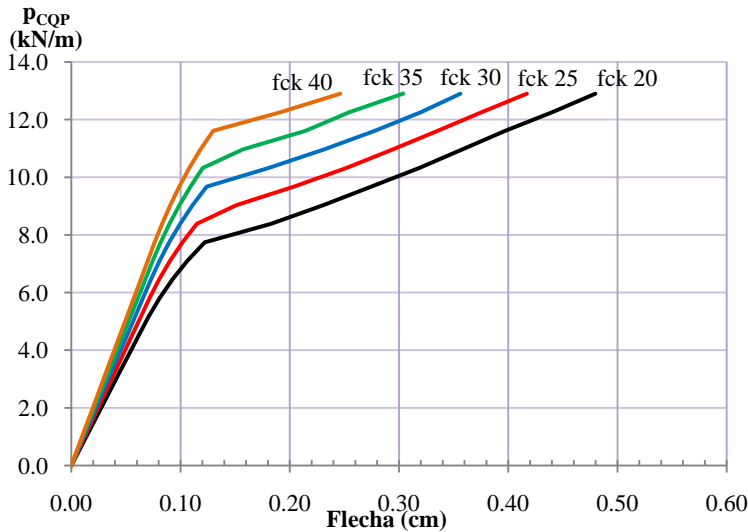


Figura 6.19 – Variação da resistência à compressão f_{ck} : gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão das vigas VB-fck

O próximo gráfico ilustra a variação da flecha, correspondente à carga máxima aplicada, com a resistência à compressão do concreto.

Observa-se um decréscimo aproximadamente linear com o aumento do valor de f_{ck} .

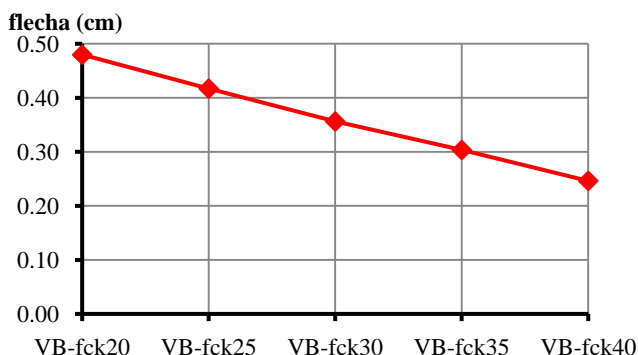


Figura 6.20 – Variação da flecha correspondente à carga máxima com o aumento da resistência à compressão do concreto para o grupo VB-fck

6.3.2 Grupo VB-G1

Este primeiro grupo de vigas biapoiadas estudado está separado em dois subgrupos, sendo que no primeiro foi estudado um maior número de vigas com o objetivo de avaliar a contribuição do efeito “tension-stiffening” em função da variação da taxa de armadura, e assim verificar intervalos de taxas de armadura que são mais interessantes aos estudos. Os dados do concreto para todas as vigas do grupo estão na tabela a seguir.

Tabela 6.12 – Grupo VB-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	8.66

Subgrupo VB-G11

Neste subgrupo foram estudadas 8 vigas com taxas de armadura crescentes. Estudou-se uma faixa maior de variação da taxa de armadura compreendendo desde próximo a armadura mínima exigida até taxas mais altas onde o dimensionamento exigiu armadura dupla, mas todas

dimensionadas no domínio 3 do ELU de comportamento da seção transversal, conforme já mencionado no item 6.1.

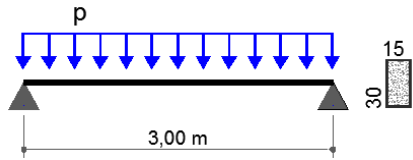


Figura 6.21 – Subgrupo VB-G11: geometria e carregamento

Na tabela 6.13 estão especificados o carregamento de serviço (p_{CQP}) e a armação longitudinal da seção mais solicitada de cada viga (seção do meio do vão), sendo A_s a armadura de tração e A'_s a armadura de compressão. Na última coluna está indicada a porcentagem do vão da viga que está solicitada por momento fletor maior que o momento de fissuração (M_r). A tabela também contém a porcentagem de armadura longitudinal das armaduras de tração (ρ) e compressão (ρ') e o coeficiente de “tension stiffening” α calculados para a seção central.

Tabela 6.13 – Subgrupo VB-G1:carregamento e armação

Viga	p_{CQP} (kN/m)	A_s		A'_s		ρ (%) (A_s)	α	ρ' (%) (A'_s)	$M_{CQP} > M_r$ (% vão)
		barras	cm ²	barras	cm ²				
VB-G111	4.30	2 ϕ 8	1.00	-		0.22	0.03636	0	0.00
VB-G112	8.60	2 ϕ 10	1.57	-		0.35	0.04682	0	32.00
VB-G113	12.90	3 ϕ 10	2.36	-		0.52	0.06067	0	63.33
VB-G114	17.20	4 ϕ 10	3.15	-		0.70	0.07377	0	74.00
VB-G115	21.50	4 ϕ 12.5	4.92	-		1.09	0.10054	0	80.00
VB-G116	25.80	5 ϕ 12.5	6.15	-		1.37	0.11713	0	83.67
VB-G117	30.10	5 ϕ 12.5	6.15	2 ϕ 6.3	0.63	1.37	0.11713	0,14	86.00
VB-G118	34.40	6 ϕ 12.5	7.38	2 ϕ 10	1.57	1.64	0.13219	0,35	87.67

O detalhamento das armaduras longitudinais de cada viga deste grupo e das demais vigas biapoiadas estudadas estão ilustradas no Anexo A, item A.1.

Primeiramente são mostrados os gráficos carga aplicada versus flecha no meio do vão das vigas com os deslocamentos calculados no estágio I, estágio II, e os resultados obtidos pelo Analest para visualização da contribuição do concreto fissurado na rigidez da viga.

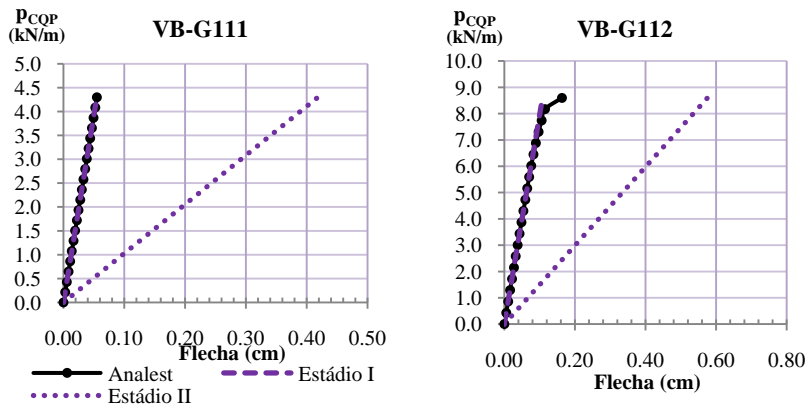


Figura 6.22 – VB-G111 e VB-G112: contribuição do concreto tracionado na rigidez da peça

A solicitação máxima da viga VB-G111 não ultrapassou o momento de fissuração, logo a viga tem comportamento linear e os resultados do Analest coincidem com o Estádio I. Na viga VB-G112 o concreto começa a fissurar, logo em parte entra no estágio II.

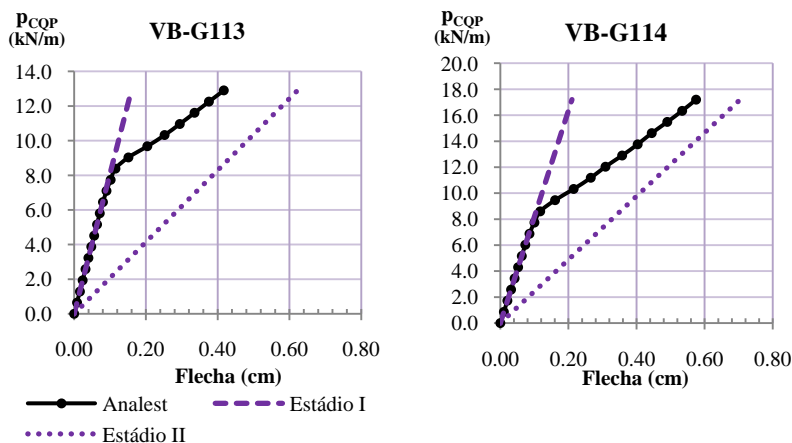


Figura 6.23 – VB-G113 e VB-G114: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça

A partir da viga VB-G113 as solicitações são maiores com maior parte do vão da viga fissurado para a carga final de serviço (ver

tabela 6.13). Pode-se observar nos gráficos a contribuição do concreto fissurado para a rigidez da seção, que é representada pela área entre a linha dos deslocamentos do Analest e a linha do Estádio II.

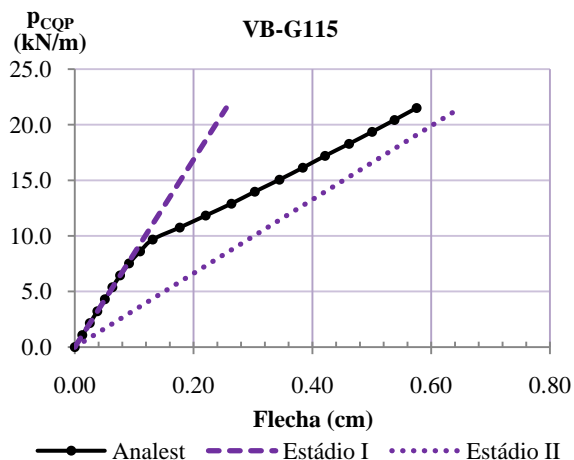


Figura 6.24 – VB-G115: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça

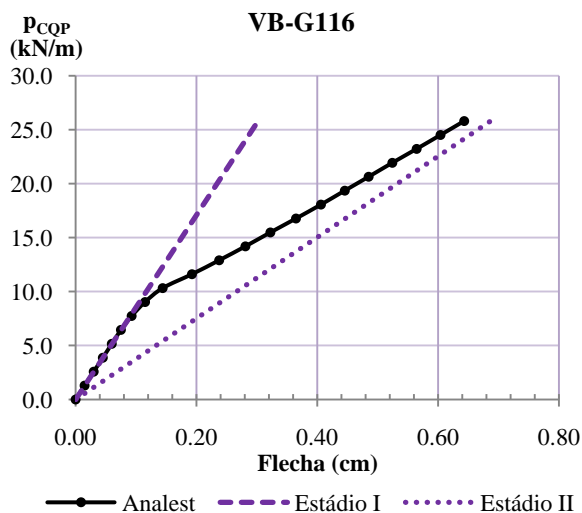


Figura 6.25 – VB-G116: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça

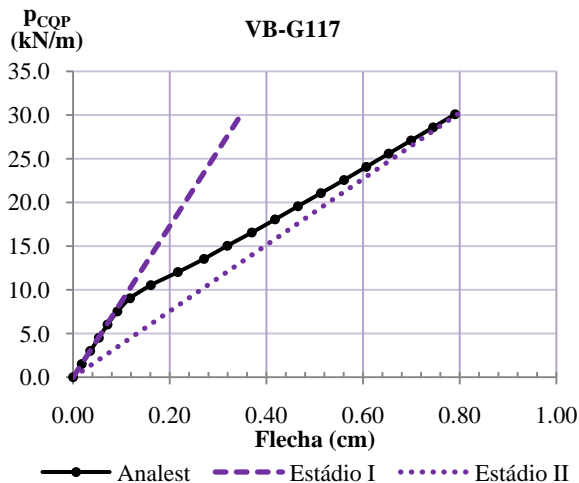


Figura 6.26 – VB-G117: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça

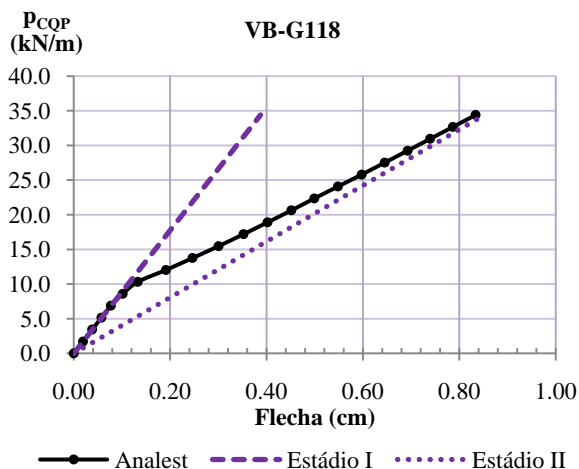


Figura 6.27 – VB-G118: contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça

Com o aumento do nível de fissuração, devido o aumento do carregamento, e também da taxa de armadura das vigas, percebe-se que a contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça diminui, o que é mostrado pela curva carga versus flecha do Analest, que fica mais próxima da linha do estágio II. Nas vigas VBG117 e VBG118 a flecha para a carga total de serviço calculada pelo Analest fica muito próxima à

linha do Estádio II, o que significa que o concreto está bastante fissurado e neste nível de carregamento pouco contribui para a rigidez da peça.

Na tabela 6.14 está a diferença percentual entre o deslocamento obtido pelo modelo do Analest e o deslocamento calculado considerando toda a viga no estágio II, onde se pode observar a diminuição da diferença conforme se aumenta a armadura e o carregamento de uma viga para outra.

Pode-se dizer que a partir da viga VB-G116 a contribuição do concreto fissurado e a influência da extensão do vão que ainda se encontra no estágio I na rigidez da viga são pequenas. Logo, ao analisar este grupo de vigas percebe-se que o estudo dos métodos simplificados e modelos refinados para o cálculo da flecha imediata que consideram esse efeito é mais interessante ser feita para vigas com taxas de armadura abaixo de 1,30%, simplesmente armadas (sem armadura dupla), que também são vigas mais usuais em projetos de estruturas de concreto armado.

Tabela 6.14 – Subgrupo VB-G11: avaliação da contribuição do concreto fissurado e influência de parte do vão no estágio I na rigidez da viga

Viga	Flecha (cm)		Diferença (%)
	Analest	Est. II	
VB-G111	0.05498	0.4185	86.86
VB-G112	0.16306	0.5756	71.67
VB-G113	0.41707	0.6225	33.00
VB-G114	0.57495	0.7043	18.36
VB-G115	0.57557	0.6485	11.25
VB-G116	0.64317	0.6870	6.38
VB-G117	0.79052	0.7955	0.62
VB-G118	0.83379	0.8521	2.15

A seguir estão os gráficos ilustrando os resultados obtidos para cada viga pela relação carga aplicada versus flecha no meio do vão calculados por cada modelo e método. Os gráficos que ilustram a flecha ao longo da viga para a carga total de serviço para os diferentes modelos de cada viga estão no Anexo B, item B.1. Os gráficos da viga VB-G111 não são mostrados já que a viga não entrou no estágio II.

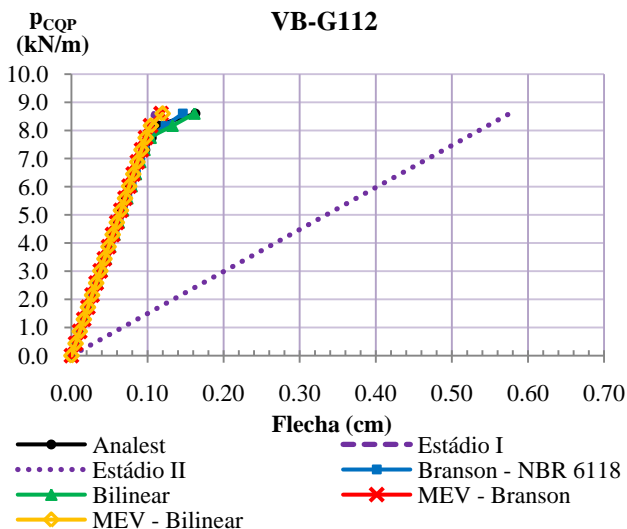


Figura 6.28 – VB-G112: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

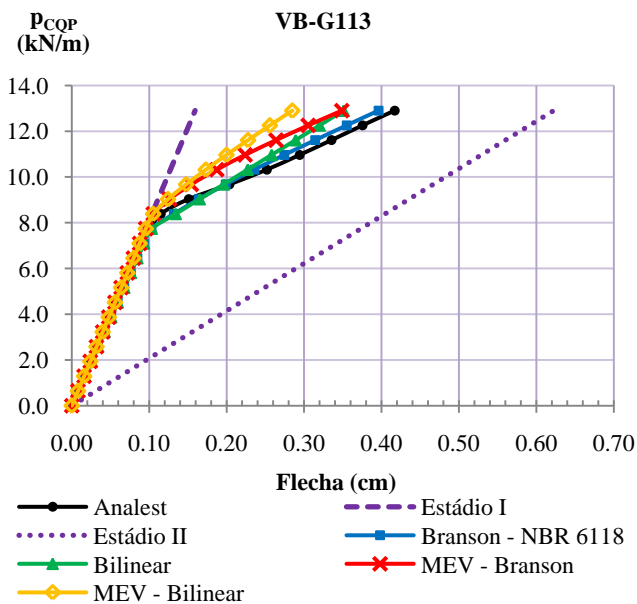


Figura 6.29 – VB-G113: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

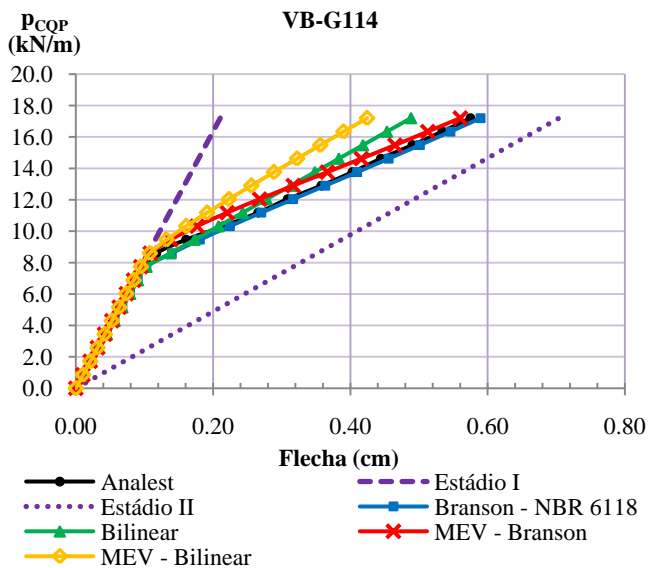


Figura 6.30 – VB-G114: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

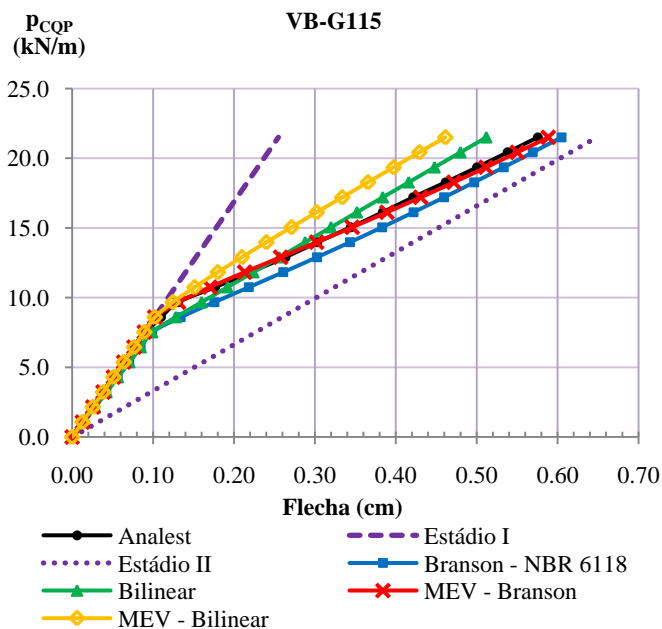


Figura 6.31 – VB-G115: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

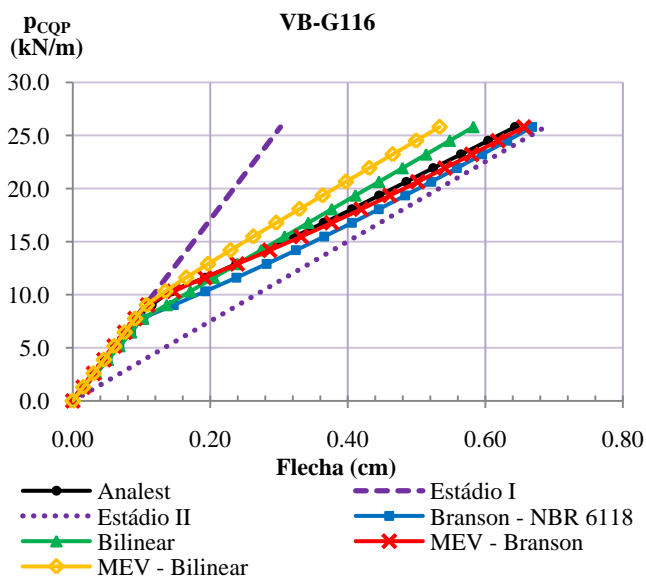


Figura 6.32 – VB-G116: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

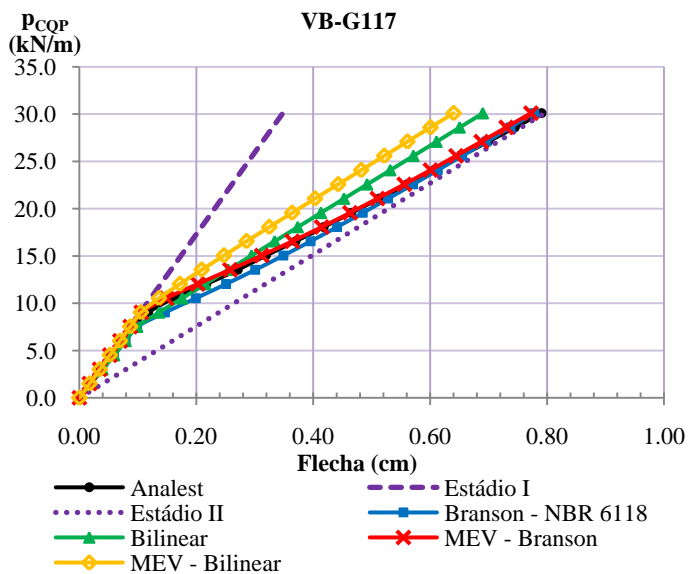


Figura 6.33 – VB-G117: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

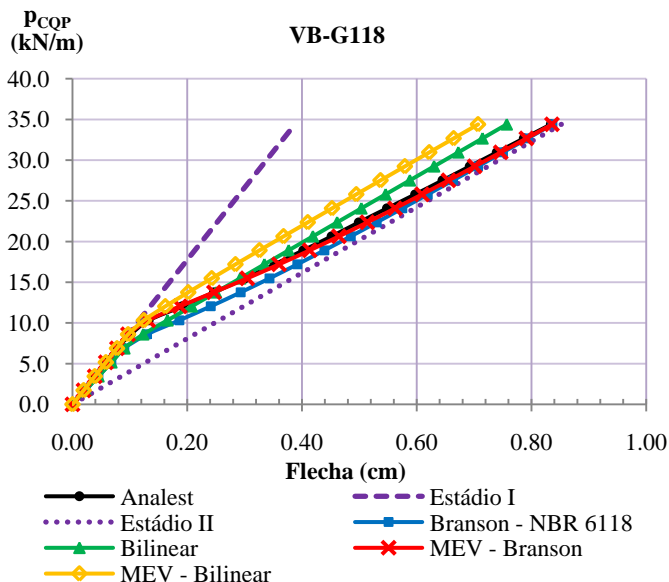


Figura 6.34 – VB-G118: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Os resultados das flechas de cada viga, para o carregamento total de serviço, calculados para cada método e modelo, estão mostrados no gráfico a seguir onde se pode visualizar a variação das flechas de viga para viga e de modelo para modelo.

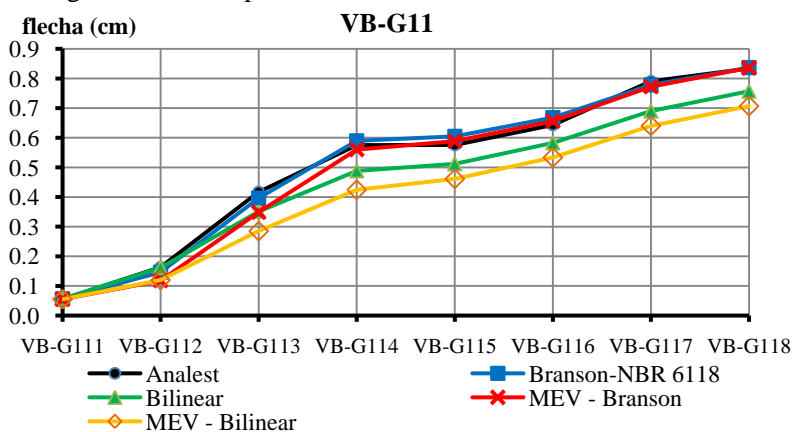


Figura 6.35 – Subgrupo VB-G11: resultado das flechas finais

Pelos gráficos carga aplicada versus flecha no meio do vão e pelo gráfico da Figura 6.35 podem-se observar os resultados obtidos para cada viga. O método simplificado Bilinear e o MEV-Bilinear apresentaram resultados de flechas menores, para o mesmo nível de carga aplicada, que os do modelo do Analest para todas as vigas, o que pode ser explicado pela maior rigidez desses modelos no trecho pós-fissuração das curvas carga-flecha apresentadas. Já o método simplificado Branson-NBR e MEV-Branson apresentaram resultados bem próximos aos do modelo do Analest.

Tendo como referência os resultados do modelo Analest, a próxima tabela contém a diferença percentual dos resultados de flecha final (correspondente à carga total de serviço) obtidos pelos métodos simplificados e modelos do AVSer em relação aos obtidos pelo modelo do Analest. A viga VB-G111 não é comparada por estar ainda no estágio I, sem fissuração. Na última linha da tabela 6.15 a média apresentada é calculada considerando os valores das diferenças percentuais em módulo.

Tabela 6.15 – Subgrupo VB-G11: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G112	-10.29	-0.88	-27.79	-26.57
VB-G113	-5.02	-15.83	-16.40	-31.71
VB-G114	2.58	-15.06	-2.57	-26.18
VB-G115	5.08	-11.05	2.26	-19.86
VB-G116	3.88	-9.41	2.00	-17.07
VB-G117	-1.55	-12.71	-2.29	-19.02
VB-G118	0.35	-9.22	0.24	-15.22
Média	4.11	10.60	7.65	22.23

Analisando os resultados apresentados na tabela 6.15 percebe-se que o MEV-Bilinear apresentou a maior variação dos resultados em relação ao Analest (média 22,23%) com valores de flechas sempre menores. A melhor média apresentada foi pelo método simplificado Branson-NBR (4,11%) melhor que o modelo refinado MEV-Branson (7,65%). Com exceção do MEV-Bilinear, as médias percentuais de

variação em relação ao Analest foram menores que 11%, podendo ser consideradas satisfatórias.

Subgrupo VB-G12

A diferença em relação ao sub-grupo VB-G11 é o tipo de carregamento, altera-se de carga distribuída para carga concentrada, conforme ilustra a figura 6.36.

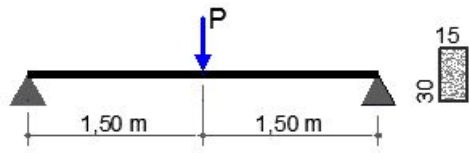


Figura 6.36 – Subgrupo VB-G12: geometria e carregamento

Neste subgrupo foram analisadas três vigas variando o carregamento e conseqüentemente a armação longitudinal. Na tabela 6.16 estão os dados do carregamento e armação longitudinal; a carga distribuída P_{CQP} é o peso próprio da viga que é aplicado como carga inicial junto com o primeiro incremento da carga P_{CQP} .

Tabela 6.16 – Subgrupo VB-G12: carregamento e armação das vigas

Viga	P_{COP} (kN)	P_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP} > M_r$ (% vão)
			barras	cm ²			
VB-G121	9.53	1.13	2 ϕ 10	1.57	0.35	0.04720	0
VB-G122	22.43	1.13	4 ϕ 10	3.14	0.70	0.07428	53.67
VB-G123	35.33	1.13	4 ϕ 12.5	4.92	1.09	0.10146	69.67

Os resultados obtidos por cada método/modelo expressos pela relação carga aplicada versus flecha no meio do vão, para cada viga, estão mostrados nos gráficos a seguir.

A viga VB-G121 não foi solicitada por momento maior que o momento de fissuração M_r , logo, a seção analisada não entrou no estágio II de comportamento.

Na figura 6.37, referente à viga VB-G121, observa-se uma descontinuidade na curva carga-flecha no trecho linear-elástico no primeiro incremento de carga. Isso ocorre nas vigas submetidas à carga concentrada, devido ao fato de, no primeiro incremento de carga P_{CQP} , ser adicionado também a carga distribuída referente ao peso próprio

p_{CQP} , gerando assim a descontinuidade mencionada, que é menor para as vigas submetidas a cargas maiores.

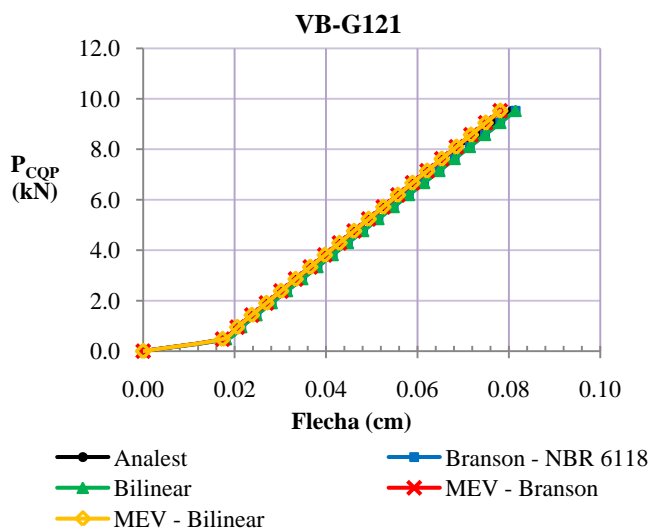


Figura 6.37 – VB-G121: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

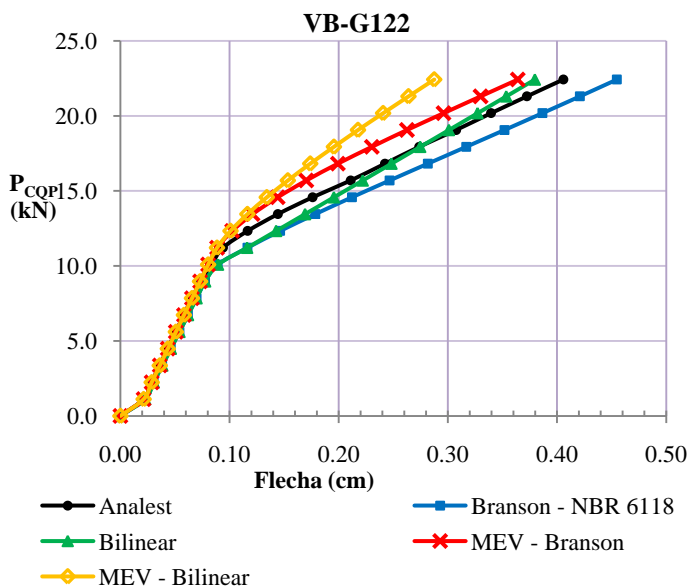
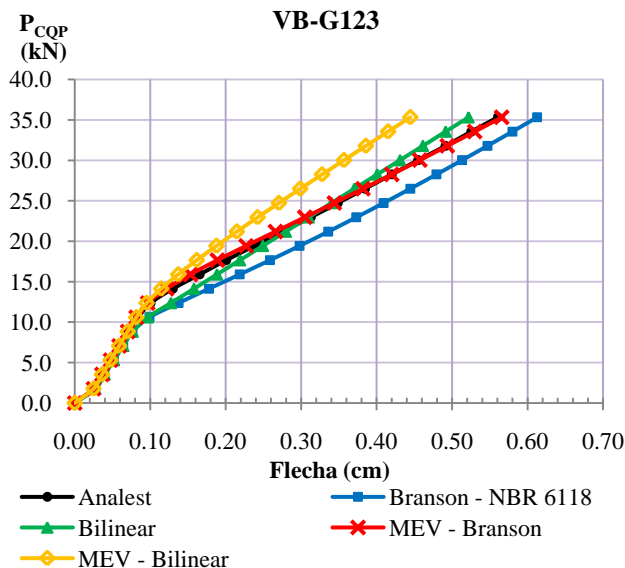


Figura 6.38 – VB-G122: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão**Figura 6.39 – VB-G123: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão**

Para as vigas VB-G122 e VB-G123 o método Branson-NBR apresentou os maiores valores de deslocamento para o mesmo nível de carga, isso se explica pelo fato de a carga de início de fissuração ser de valor menor que os demais métodos e modelos (exceto o método Bilinear), mas com rigidez no trecho pós-fissuração similar ao modelo do Analest, resultando assim em valores maiores de deslocamento. Já o método Bilinear, mesmo apresentando carga de fissuração mais baixa, tem uma rigidez após a fissuração maior que a do modelo do Analest, apresentando assim, menores deslocamentos, assim como o MEV-Bilinear, o qual, por mostrar uma rigidez maior, juntamente com carga de início de fissuração um pouco maior do que os demais modelos, obteve os menores valores de flecha no trecho pós-fissuração para o mesmo nível de carga, dentre todos os métodos e modelos. Pode-se observar, ainda, a similaridade da curva carga-flecha do MEV-Branson com a curva do modelo do Analest na viga VB-G123.

No próximo gráfico estão os valores das flechas finais (para a carga final de serviço) de cada viga, para cada método/modelo.

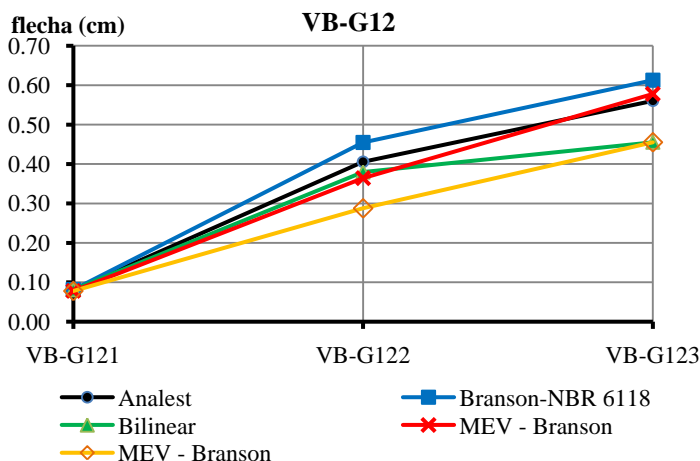


Figura 6.40 -Subgrupo VB-G12: resultados das flechas finais

Como pode ser visto na tabela 6.17, o MEV-Branson apresentou a menor média de diferença percentual em relação aos resultados do Analest (5,51%), enquanto que, o MEV-Bilinear, a maior (17,01%).

Tabela 6.17 – Subgrupo VB-G12: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G121	0.95	0.95	-3.20	-3.20
VB-G122	12.09	-6.42	-10.22	-29.08
VB-G123	9.29	-18.76	3.10	-18.76
Média	7.44	8.71	5.51	17.01

6.3.3 Grupo VB-G2

Neste segundo grupo estudado, adotaram-se as propriedades do concreto que estão na tabela 6.18. No subgrupo VB-G21 foi estudado um maior número de vigas para, como realizado no subgrupo VB-G11, analisar o intervalo de taxa de armadura onde a contribuição do concreto fissurado na rigidez na peça é considerável e, portanto, mais interessante de se estudar.

Tabela 6.18 – Grupo VB-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	15.39

Sub-Grupo VB-G21

Neste subgrupo são estudadas 9 vigas submetidas a carregamento distribuído uniformemente, abrangendo uma larga faixa de taxa de armadura e nível de carregamento que variam de viga para viga.

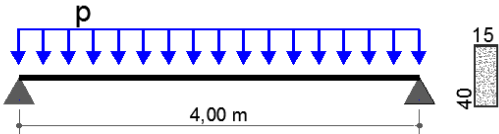


Figura 6.41 – Subgrupo VB-G21: geometria e carregamento

Na tabela 6.19 estão especificados o carregamento de serviço (q_{CQP}), a armadura longitudinal da seção solicitada, também a porcentagem de armadura na seção dentre outros dados, conforme descrito no item 6.3.2 para a tabela 6.13.

Tabela 6.19 – Subgrupo VB-G21: carregamento e armadura

Viga	P_{CQP} (kN/m)	A_s		A'_s		ρ (%) (As)	α	ρ' (%) (As')	$M_{CQP} > M_r$ (% vão)
		barras	cm ²	barras	cm ²				
VB-G211	4.30	2 ϕ 8	1.00	-	0.00	0.17	0.03164	0.00	0.00
VB-G212	8.60	3 ϕ 10	2.36	-	0.00	0.39	0.05040	0.00	32.25
VB-G213	12.90	4 ϕ 10	3.14	-	0.00	0.52	0.06058	0.00	63.25
VB-G214	17.20	6 ϕ 10	4.71	-	0.00	0.79	0.07985	0.00	74.25
VB-G215	21.50	5 ϕ 12.5	6.15	-	0.00	1.03	0.09613	0.00	79.75
VB-G216	25.80	6 ϕ 12.5	7.38	-	0.00	1.23	0.10903	0.00	83.50
VB-G217	30.10	4 ϕ 16	8.05	2 ϕ 6.3	0.63	1.34	0.11568	0.11	86.50
VB-G218	34.40	5 ϕ 16	10.05	2 ϕ 10	1.57	1.68	0.13401	0.26	88.00
VB-G219	43.00	6 ϕ 16	12.07	3 ϕ 12.5	3.69	2.01	0.15034	0.62	90.25

Os resultados para cada viga estão mostrados nos gráficos a seguir, por meio da relação carga aplicada versus flecha no meio do vão.

A primeira viga não foi solicitada de forma a atingir a fissuração do concreto, logo seu comportamento se manteve no estágio I.

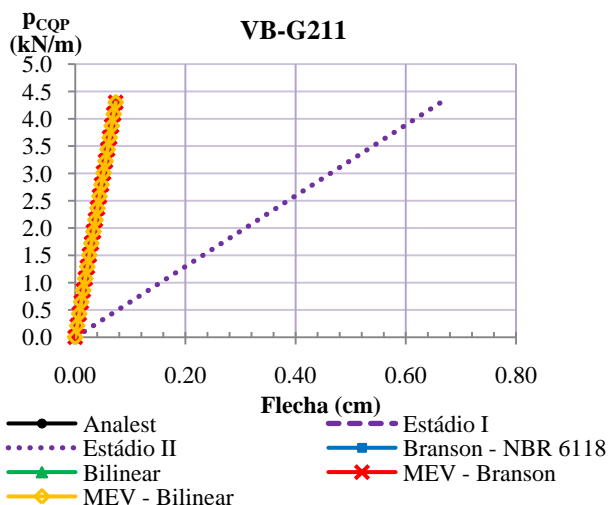


Figura 6.42 – VB-G211: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

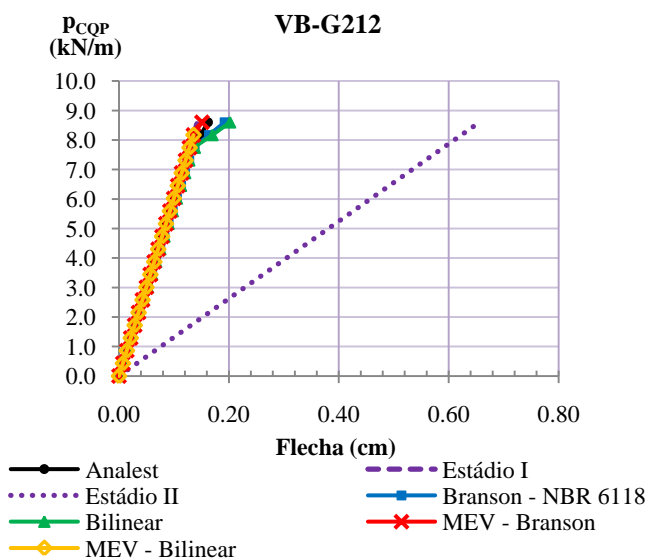


Figura 6.43 – VB-G212: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

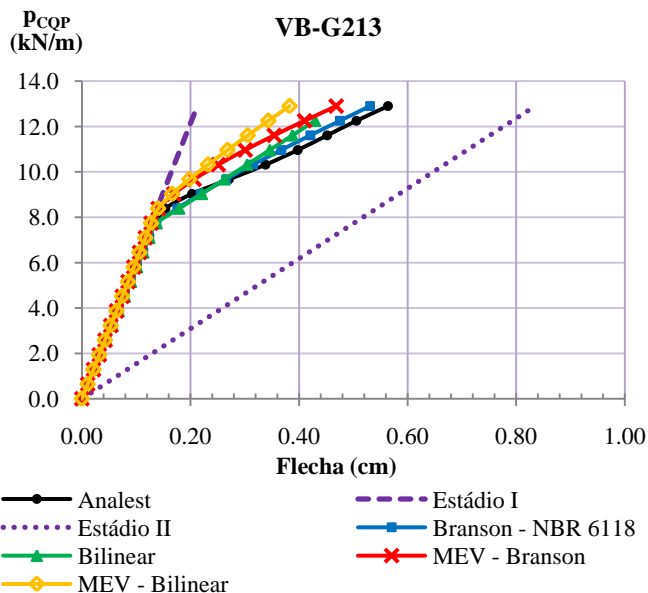


Figura 6.44 – VB-G213: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

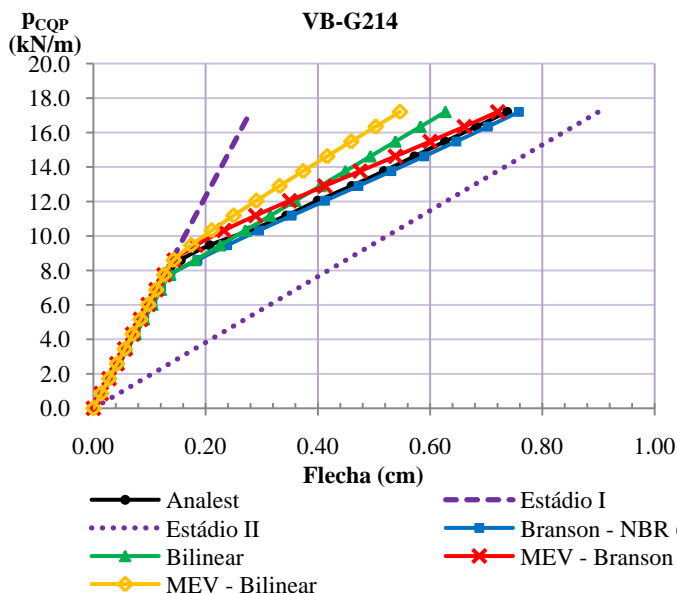


Figura 6.45 – VB-G214: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

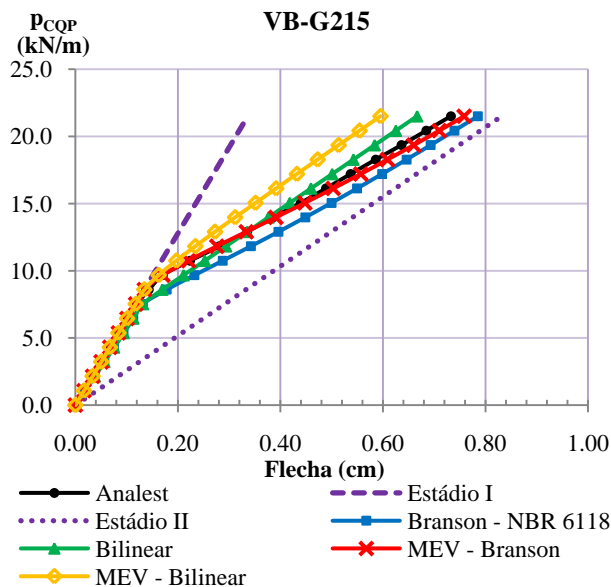


Figura 6.46 – VB-G215: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

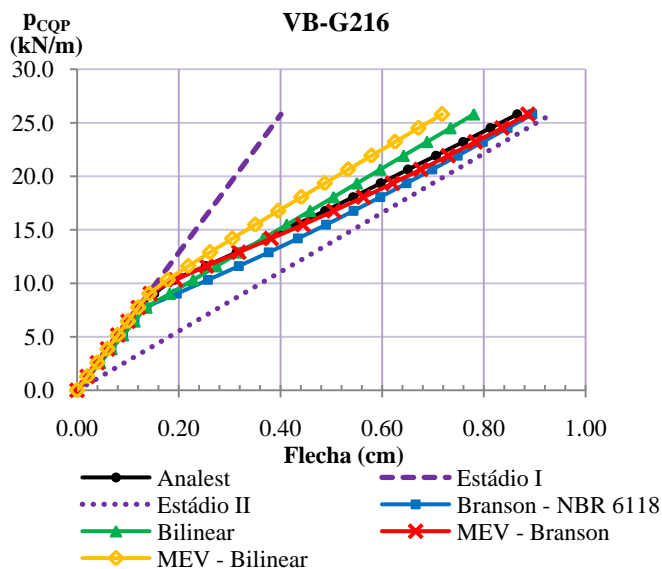


Figura 6.47 – VB-G216: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

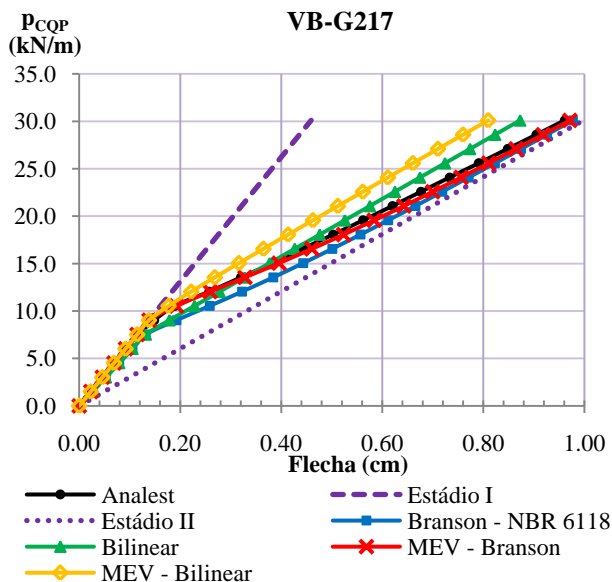


Figura 6.48 – VB-G217: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

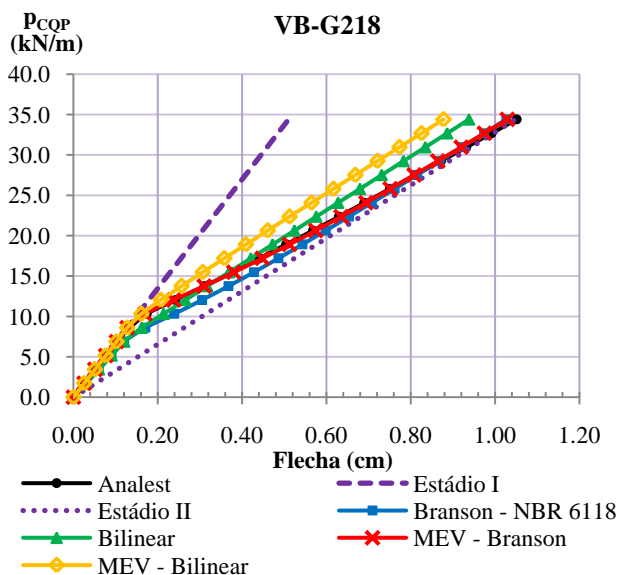


Figura 6.49 – VB-G218: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

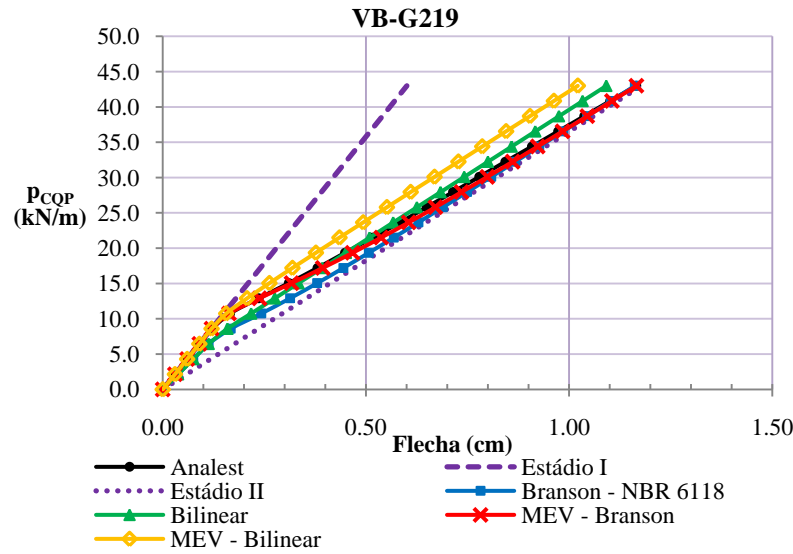


Figura 6.50 – VB-G219:gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Analisando os resultados de cada viga pode-se visualizar a diminuição da contribuição do concreto fissurado para a rigidez da peça, levando a deslocamentos maiores, conforme é aumentada a solicitação e a taxa de armadura de uma viga para outra. Esta variação está mostrada na tabela 6.20, como diferença percentual entre as flechas finais obtidas pelo Analest e as obtidas considerando toda a viga no Estádio II.

Tabela 6.20 – Subgrupo VB21:avaliação da contribuição do concreto fissurado e influência de parte do vão no estágio I na rigidez da viga

Viga	Flecha (cm)		Diferença (%)	ρ (%)
	Analest	Est. II		
VB-G211	0.0736	0.6637	88.91	0.17
VB-G212	0.1587	0.6559	75.80	0.39
VB-G213	0.4980	0.8348	40.34	0.52
VB-G214	0.6540	0.9000	27.34	0.79
VB-G215	0.6783	0.8318	18.46	1.03
VB-G216	0.8057	0.9325	13.60	1.23
VB-G217	0.9080	0.9981	9.03	1.34
VB-G218	1.0000	1.0485	4.62	1.68
VB-G219	1.1211	1.1779	4.82	2.01

A diferença percentual da viga VB-211 é de aproximadamente 90%, enquanto que para as duas últimas vigas é de apenas 5%, aproximadamente; a partir da viga VB-G216 a diferença já é menor que 15%, para uma taxa de armadura de 1,0% e 83% do vão fissurado.

Em relação ao comportamento das curvas carga versus flecha dos diferentes métodos e modelos, a partir da viga 2 pode-se visualizar que o método Bilinear e o MEV-Branson apresentaram maior rigidez no trecho da curva pós-fissuração em comparação aos outros modelos, fornecendo então, os menores valores de deslocamento para um mesmo nível de carga, onde a diferença apresentada entre estes dois métodos é devido à carga inicial de fissuração, que para o método Bilinear foi menor que os demais modelos estudados, similar à carga do método Branson-NBR. Para as vigas 5 a 9, a curva carga-flecha calculada pelo modelo MEV-Branson apresentou grande proximidade da curva do modelo do Analest, já para as vigas 3 e 4 a curva do método Branson-NBR foi a que mais se aproximou do modelo de referência.

Na figura 6.51 está o gráfico com o resumo dos resultados de flechas obtidas para a carga final de serviço, para as vigas deste subgrupo. O método Bilinear e o MEV-Bilinear apresentaram flechas menores enquanto que o Branson e o MEV-Branson flechas em geral maiores que as calculadas pelo modelo do Analest.

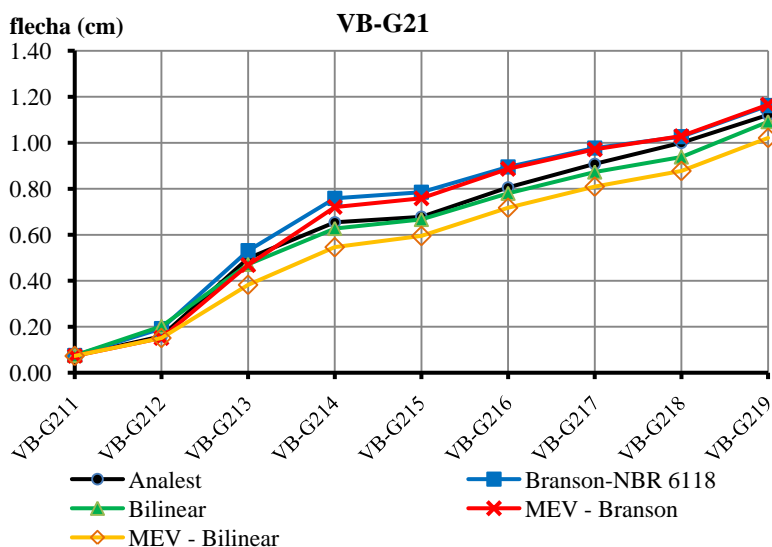


Figura 6.51 – Subgrupo VB-G21: resultados das flechas finais

Na tabela 6.21 estão as diferenças percentuais das flechas finais em relação aos resultados obtidos pelo modelo do Analest. As médias finais de cada método/modelo apresentaram valores menores que 18,12%, onde o MEV-Bilinear teve a maior média, com todos os resultados menores que o modelo do Analest, enquanto que o MEV-Branson e o método Branson-NBR apresentaram resultados mais próximos ao do modelo do Analest. Observa-se também que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

Tabela 6.21 – Subgrupo VB-G21: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G212	18.81	24.88	-6.65	-6.40
VB-G213	-5.89	-16.43	-16.93	-32.16
VB-G214	2.83	-14.94	-2.31	-25.92
VB-G215	7.16	-9.01	3.53	-18.76
VB-G216	3.42	-9.87	2.43	-17.09
VB-G217	1.68	-9.18	1.06	-15.75
VB-G218	-2.36	-10.78	-2.12	-16.52
VB-G219	-0.29	-6.31	0.04	-12.35
Média	5.30	12.68	4.38	18.12

Sub-Grupo VB-G22

O subgrupo VB-G22 é formado por 3 vigas submetidas a carga concentrada. A geometria e tipo carregamento para o subgrupo estão mostradas na figura 6.52 e na tabela 6.22 estão as especificações de cada viga.

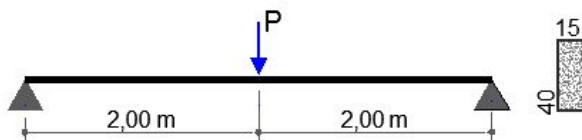


Figura 6.52 – Subgrupo VB-G22: geometria e carregamento

Tabela 6.22 – Subgrupo VB-G22: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN)	p _{COP} (kN/m)	A _s		ρ (%)	α	M _{COP>Mr} (% vão)
			barras	cm ²			
VB-G221	11.20	1.50	2 ϕ 10	1.57	0.26	0.03966	0
VB-G222	28.40	1.50	3 ϕ 12.5	3.69	0.62	0.05173	53.25
VB-G223	45.60	1.50	5 ϕ 12.5	6.15	1.03	0.09613	69.5

Os resultados obtidos para as 3 vigas estão nas figuras a seguir expostos pela relação carga aplicada versus flecha na seção do meio do vão.

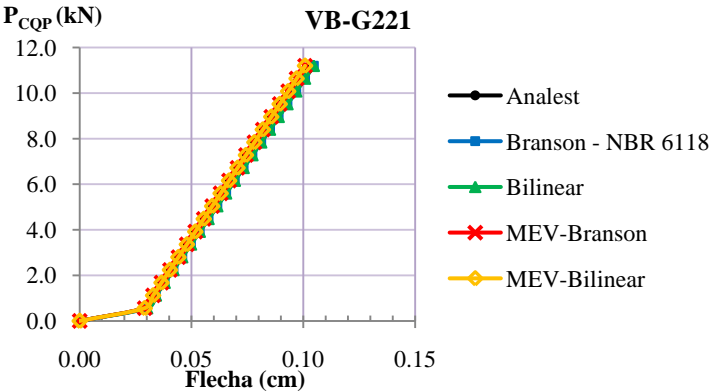


Figura 6.53 – VB-G221: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

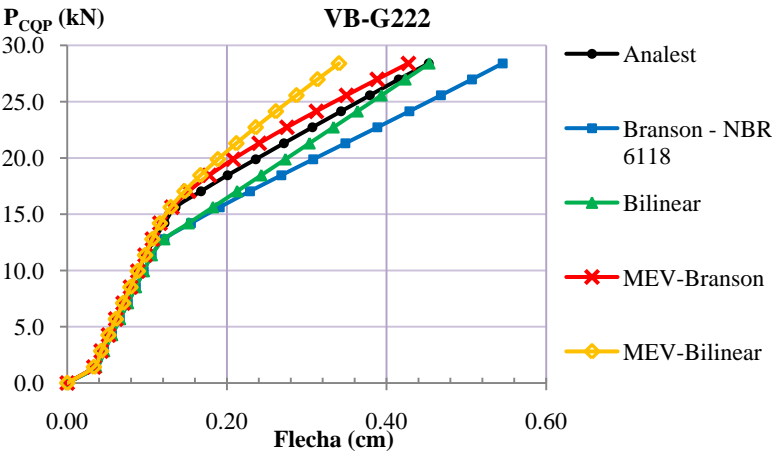


Figura 6.54 – VB-G222: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

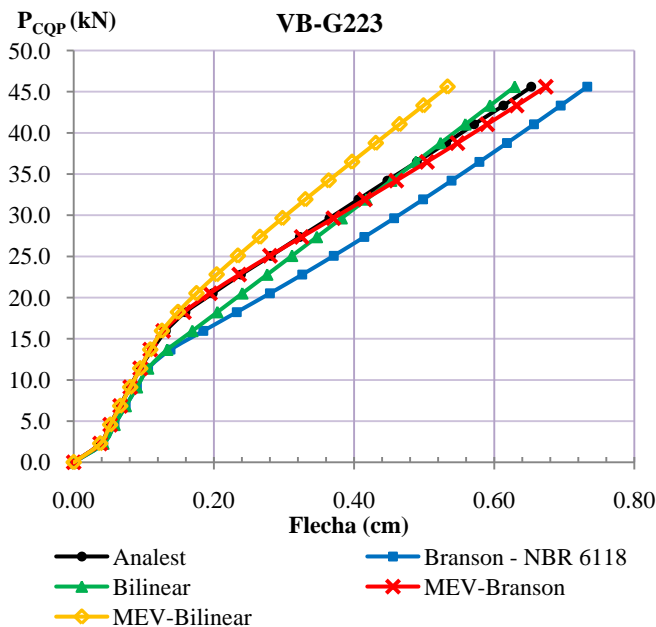


Figura 6.55 – VB-G223: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Apesar de a viga VB-G221 já apresentar parte do vão com solicitação maior que o M_r , como pode ser visto no gráfico 6.53, as curvas de cada modelo/método coincidem e indicam comportamento da viga ainda no estágio I para a carga total.

Pelos gráficos anteriores das vigas 2 e 3, observa-se que o modelo MEV-Bilinear foi o que apresentou os menores deslocamentos dentre os demais modelos para um mesmo nível de carga no trecho pós-fissuração; isto se deve ao fato de ter apresentado maior rigidez no trecho pós-fissuração em comparação com os demais modelos, da mesma forma conforme observado no subgrupo anterior. O MEV-Branson novamente foi o que apresentou a curva carga versus flecha mais próxima da curva do modelo do Analest. No próximo gráfico pode-se visualizar a variação dos resultados das flechas finais (para carga total de serviço) obtidas para o subgrupo.

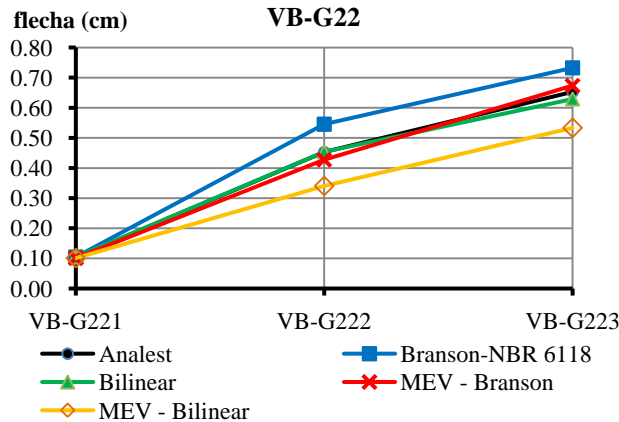


Figura 6.56 – Subgrupo VB-G22: resultados das flechas finais

As melhores médias de diferença percentual dos métodos/modelos em relação aos resultados do Analest encontrados foram para o método Bilinear (1,77%) e o MEV-Branson (3,68%), conforme mostra a tabela a seguir. Observa-se também que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

Tabela 6.23 – Subgrupo VB-G22: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G221	1.52	1.52	-2.24	-2.24
VB-G222	20.42	0.15	-5.64	-24.84
VB-G223	12.22	-3.63	3.15	-18.33
Média	11.39	1.77	3.68	15.14

6.3.4 Grupo VB-G3

O grupo VB-G3 é composto de seis vigas que estão divididas em dois subgrupos. Os dados do concreto são iguais ao do grupo anterior (VB-G4) diferenciando somente no M_r .

Tabela 6.24 – Grupo VB-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	32.06

Subgrupo VB-G31

As vigas estão submetidas a carregamento distribuído e possuem geometria conforme figura 6.57.

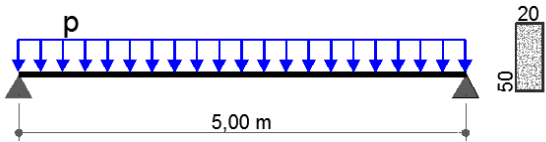


Figura 6.57 – Subgrupo VB-G31: geometria e carregamento

Tabela 6.25 – Subgrupo VB-G31 carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP} > M_r$ (% vão)
		barras	cm ²			
VB-G311	10.75	4 ϕ 10	3.14	0.31	0.04398	21.00
VB-G312	17.20	4 ϕ 12.5	4.92	0.49	0.05817	63.20
VB-G313	25.80	4 ϕ 16	8.05	0.81	0.08126	77.60

A seguir estão os resultados obtidos para cada viga.

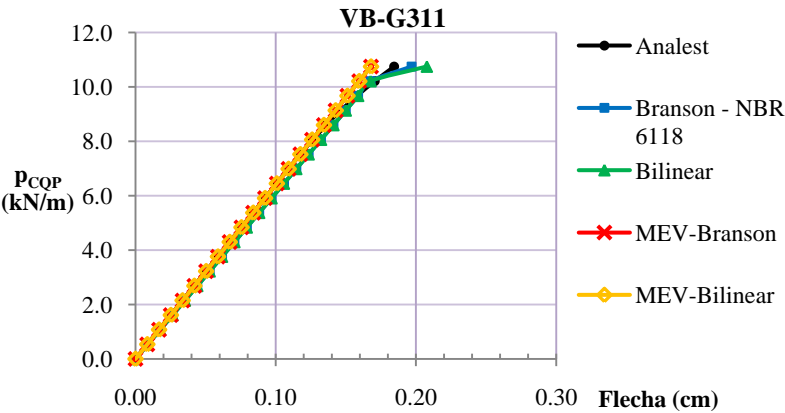


Figura 6.58 – VB-G311: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

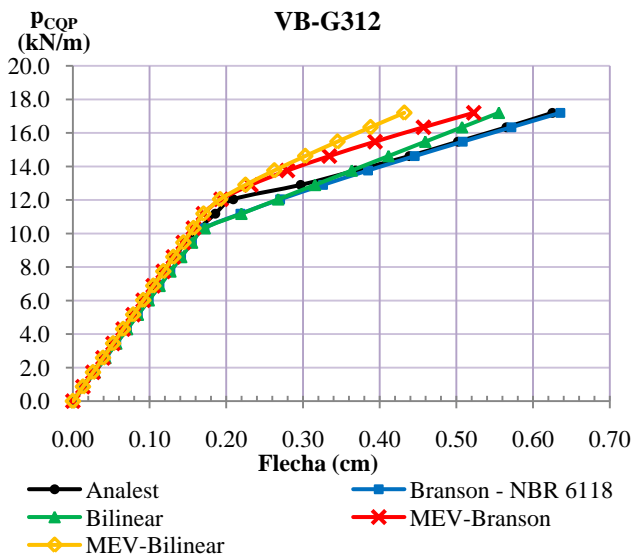


Figura 6.59 – VB-G312: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

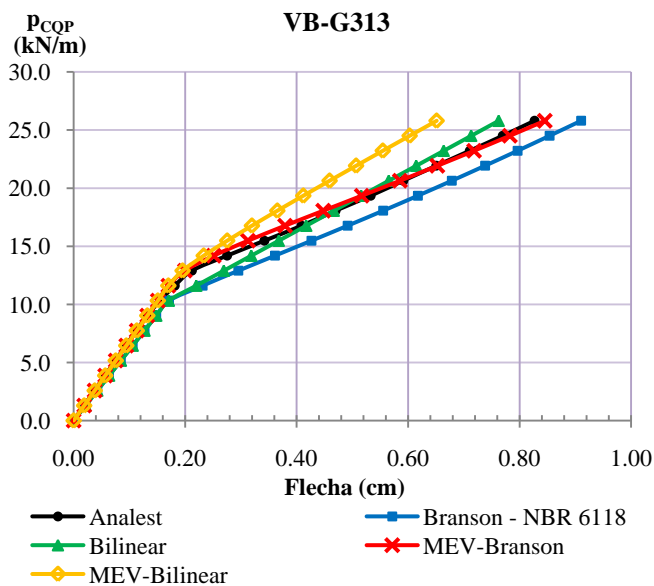


Figura 6.60 – VB-G313: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Analisando os gráficos com os resultados individuais de cada viga e também o gráfico 6.61 com o resumo dos resultados das flechas das vigas do subgrupo, verifica-se que o método simplificado Branson apresentou os maiores resultados de flecha enquanto que o MEV-Bilinear os menores. O MEV-Branson e o Bilinear apresentaram bons resultados, com pouca diferença em relação ao modelo do Analest.

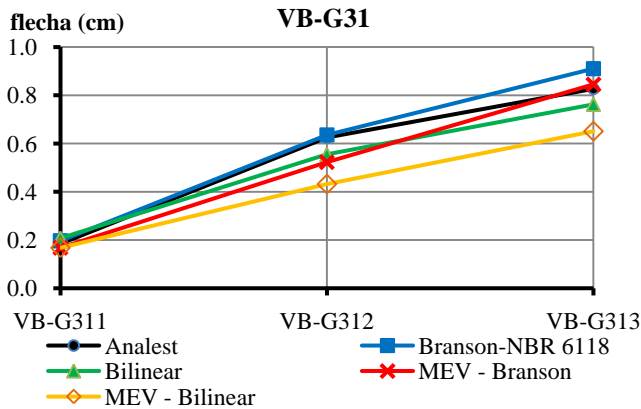


Figura 6.61 – Subgrupo VB-G31: resultados das flechas finais

Tabela 6.26 – Subgrupo VB-G31: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G311	6.75	12.63	-8.96	-8.96
VB-G312	1.65	-11.19	-16.40	-30.89
VB-G313	10.10	-7.77	2.24	-21.24
Média	6.17	10.53	9.20	20.37

A melhor média de diferença percentual em relação ao modelo do Analest é apresentada pelo método simplificado Branson-NBR (6,17%) enquanto que a maior média pelo MEV-Bilinear (20,37%), com todos os valores de flechas finais menores que o do modelo do Analest. Observa-se também que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

Subgrupo VB-G32

As três vigas deste subgrupo estão submetidas a uma carga concentrada no meio do vão.

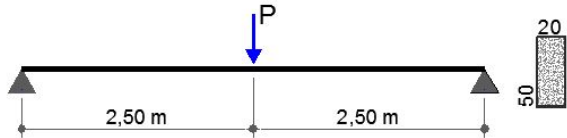


Figura 6.62 – Subgrupo VB-G32: geometria e carregamento

Procurou-se neste subgrupo solicitar as vigas a uma combinação de carregamento, no caso carga concentrada, que levasse a um momento fletor solicitante no meio do vão de valor similar ao das vigas do subgrupo VB-G31, obtendo-se assim taxa de armadura igual ou próxima pelo dimensionamento no ELU, para que posteriormente possa ser feita uma comparação das flechas obtidas pelos dois tipos de carregamento.

Tabela 6.27 – Subgrupo VB-G32: carregamento e armadura

Viga	P_{COP} (kN)	P_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP>Mr}$ (% vão)
			barras	cm ²			
VB-G321	19.750	2.500	4 ϕ 10	3.14	0.31	0.04398	1.80
VB-G322	36.950	2.500	4 ϕ 12.5	4.92	0.49	0.05817	44.20
VB-G323	58.450	2.500	4 ϕ 16	8.05	0.81	0.08126	62.60

Os resultados obtidos para cada viga estão mostrados nos gráficos a seguir.

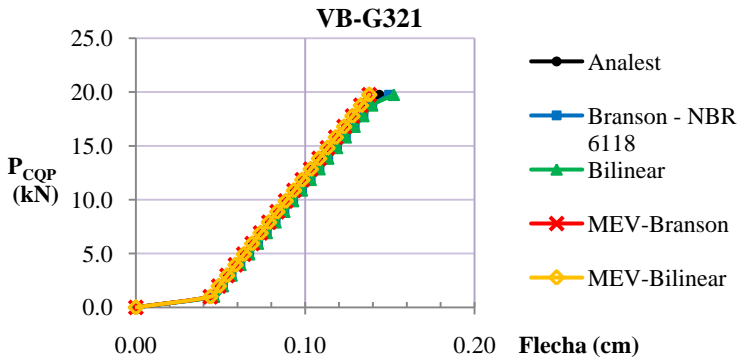


Figura 6.63 – VB-G321: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

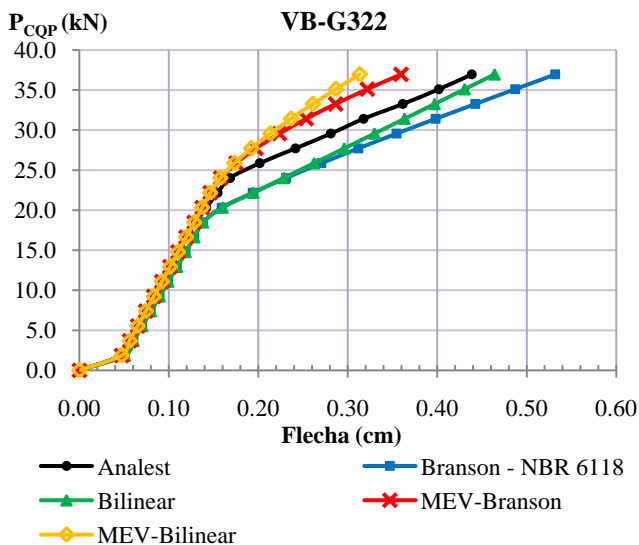


Figura 6.64 – VB-G322: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

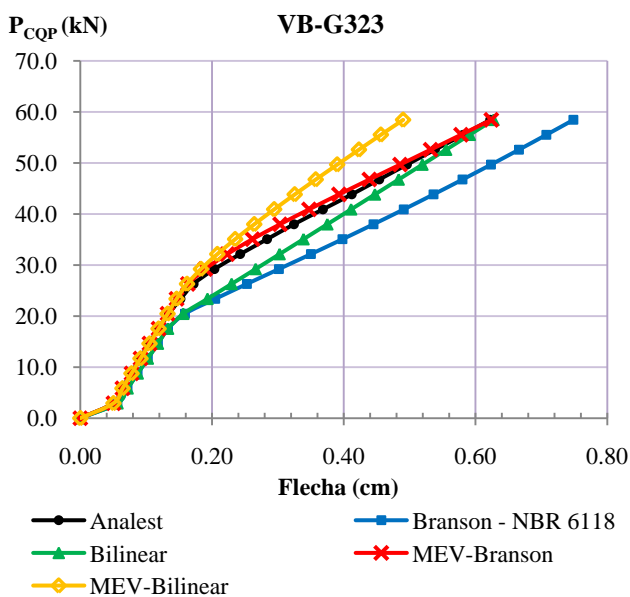


Figura 6.65 – VB-G323: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Novamente o método simplificado Branson-NBR mostrou valores de flechas maiores enquanto que o MEV-Bilinear mostrou flechas menores para o mesmo nível da carga aplicada.

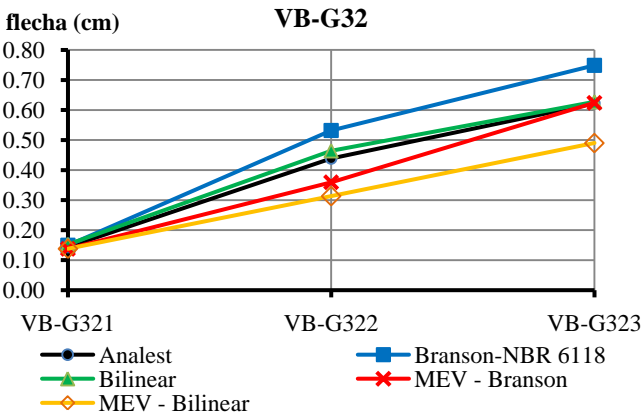


Figura 6.66 – Subgrupo VB-G32: resultados das flechas finais

Avaliando a diferença percentual dos resultados dos diversos métodos/modelos em relação ao modelo do Analest, verifica-se que o método simplificado Bilinear apresentou a menor média de diferença em relação ao modelo do Analest (4,18%), enquanto que o MEV-Bilinear a maior média (18%), com todos os valores de flecha final menores que o do modelo do Analest. Observa-se também que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

Tabela 6.28 – Subgrupo VB-G32: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G321	3.96	5.94	-4.14	-4.14
VB-G322	21.24	5.79	-18.06	-28.58
VB-G323	20.30	0.79	0.25	-21.25
Média	15.17	4.18	7.48	17.99

6.3.5 Grupo VB-G4

Este grupo também é composto por 6 vigas distribuídas em dois subgrupos, que se diferenciam pelo tipo de carregamento.

Tabela 6.29 – Grupo VB-G4: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
30	36.6	2.896	26071.59	0.002	43.81

Subgrupo VB-G41

As três vigas estão submetidas a uma carga distribuída e possuem geometria conforme figura 6.68.

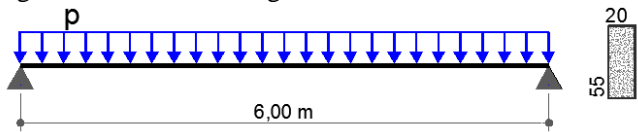


Figura 6.67 – Subgrupo VB-G41: geometria e carregamento

Tabela 6.30 – Subgrupo VB-G41: carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP>Mr}$ (% vão)
		barras	cm ²			
VB-G411	12.30	4 ϕ 12.5	4.92	0.45	0.05159	39.00
VB-G412	20.50	4 ϕ 16	8.05	0.73	0.07144	71.83
VB-G413	28.70	6 ϕ 16	12.07	1.10	0.09461	81.17

Os valores das flechas calculadas por cada método/modelo, para cada viga, estão mostrados nos gráficos seguintes pela relação carga aplicada versus flecha no meio do vão.

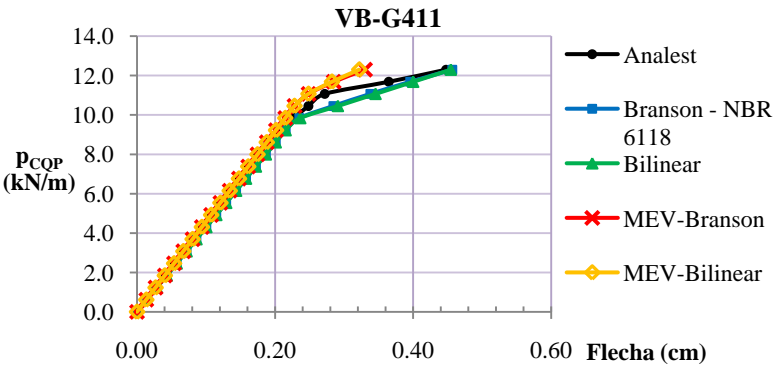


Figura 6.68 – VB-G411: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

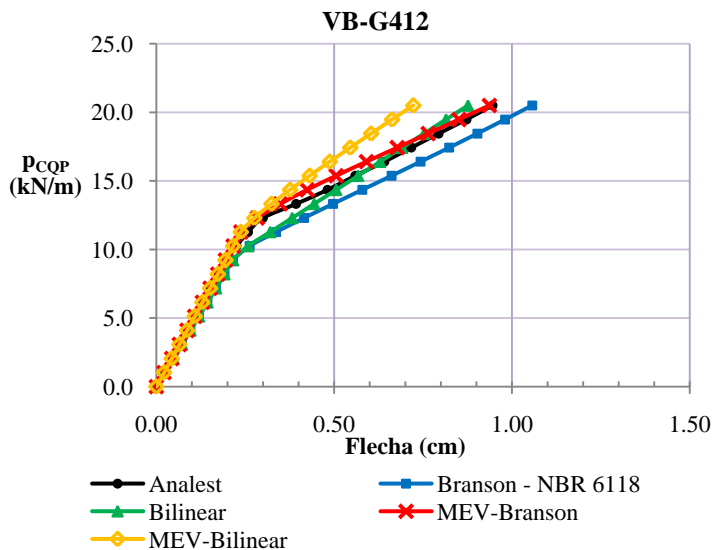


Figura 6.69 – VB-G412: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

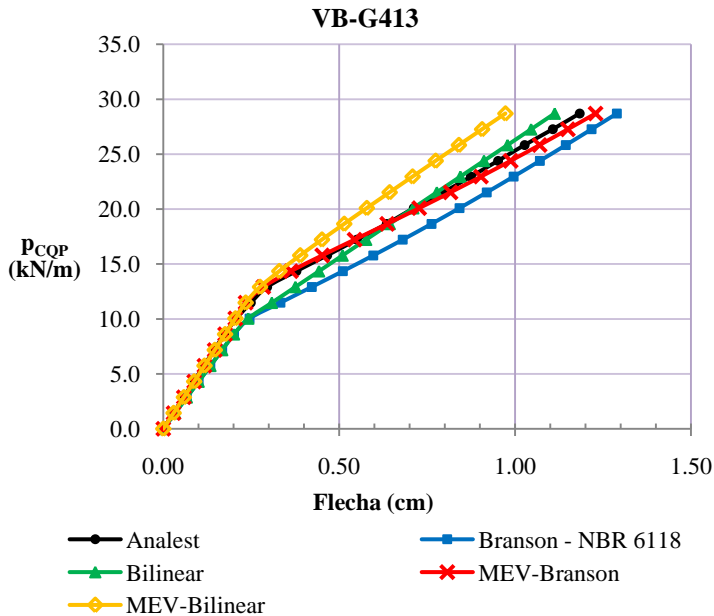


Figura 6.70 – VB-G413: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Analisando os gráficos anteriores e também a próxima figura, que mostra as flechas finais, observa-se que as flechas calculadas pelo método Branson-NBR foram as maiores dentre os modelos, devido à carga de início de fissuração ser menor, apesar de apresentar rigidez similar ao modelo do Analest. Já as flechas calculadas pelo MEV-Bilinear foram as menores, para um mesmo nível de carga aplicada, devido à maior rigidez em relação aos outros modelos. Para as vigas VB-G412 e VB-G413, a curva carga versus flecha do MEV-Branson foi a que mais se aproximou da curva do modelo do Analest.

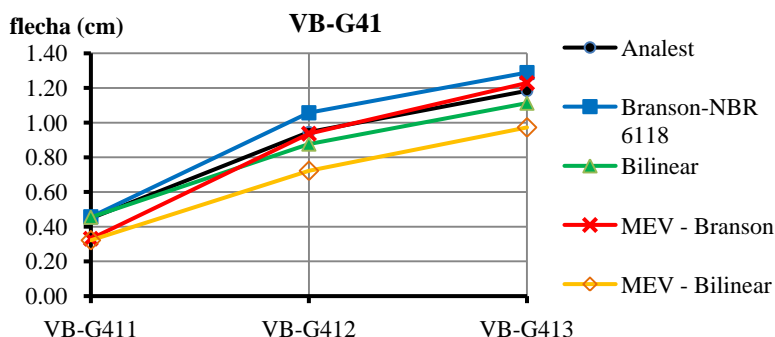


Figura 6.71 – Subgrupo VB-G41: resultados das flechas finais

Avaliando as médias de diferença percentual dos resultados de flechas finais dos diversos métodos/modelos em relação ao modelo do Analest, o método Bilinear teve a menor média (4,95%), enquanto que o MEV-Bilinear a maior (23,16%). Observa-se ainda que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

Tabela 6.31 – Subgrupo VB-G41: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G411	2.03	1.56	-26.19	-28.07
VB-G412	11.82	-7.28	-0.94	-23.56
VB-G413	8.92	-6.02	3.81	-17.85
Média	7.59	4.95	10.31	23.16

Subgrupo VB-G42

As características da geometria, carregamento e armação das três vigas deste subgrupo estão na figura 6.73 e tabela 6.32.

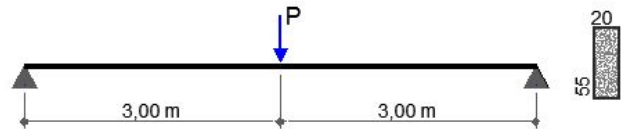


Figura 6.72 – Subgrupo VB-G42: geometria e carregamento

Tabela 6.32 – Subgrupo VB-G42: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN)	P _{COP} (kN/m)	A _s		ρ (%)	α	M _{COP>Mr} (% vão)
			barras	cm ²			
VB-G421	27.370	2.750	4 ϕ 12.5	4.92	0.45	0.05159	22.00
VB-G422	51.970	2.750	4 ϕ 16	8.05	0.73	0.07144	54.83
VB-G423	76.570	2.750	6 ϕ 16	12.07	1.10	0.09461	67.67

Os resultados calculados para cada viga estão nos gráficos a seguir.

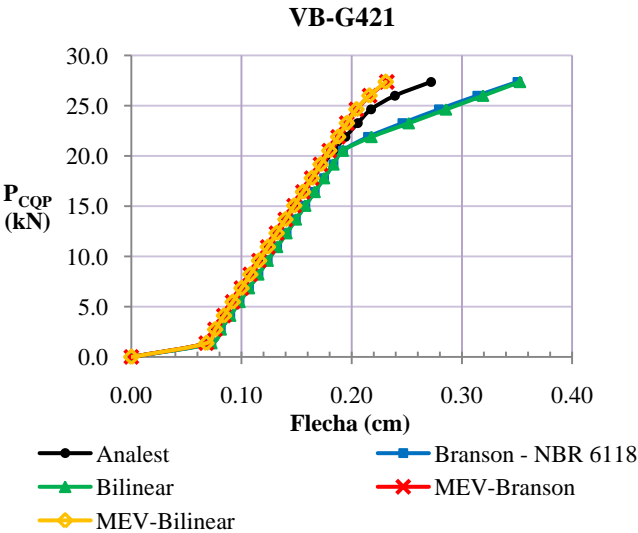


Figura 6.73 – VB-G41: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

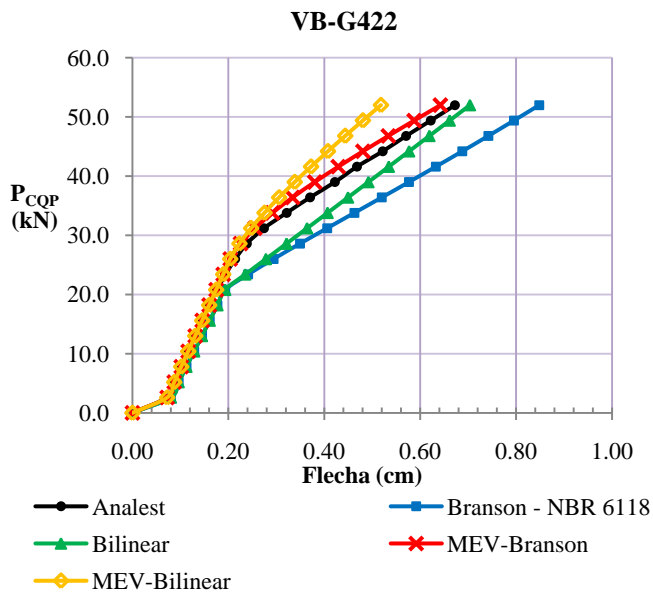


Figura 6.74 – VB-G42: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

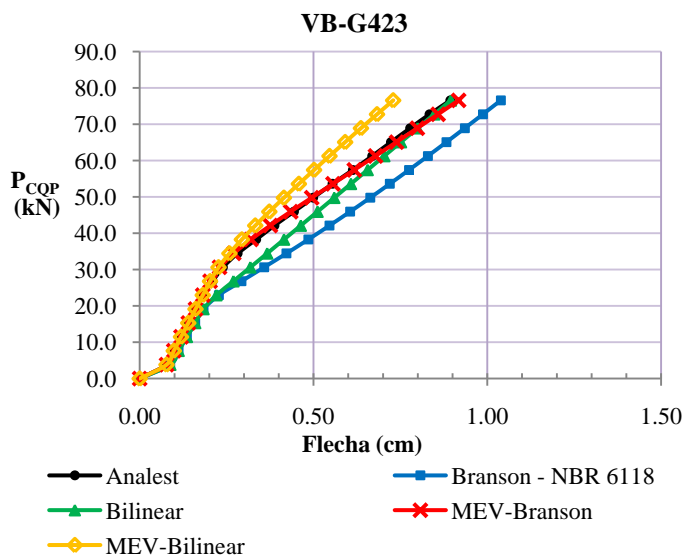


Figura 6.75 – VB-G43: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Como em outros subgrupos, repete-se o comportamento dos resultados; o método Branson-NBR apresentou os maiores valores de flecha e o MEV-Bilinear os menores, para o mesmo nível de carga aplicada. A curva carga versus flecha do MEV-Branson foi a que mais se aproximou da curva do modelo do Analest para as vigas 2 e 3.

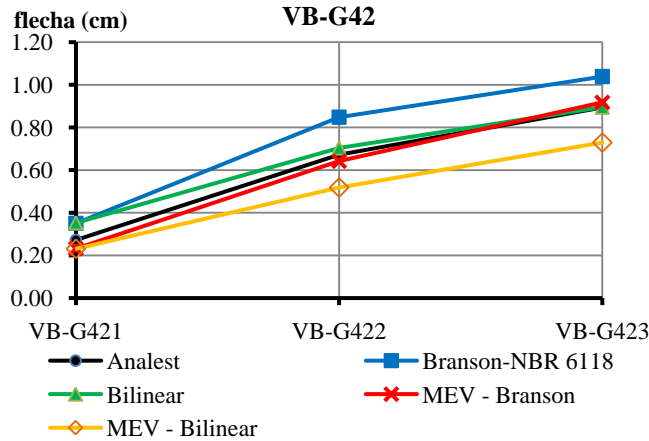


Figura 6.76 – Subgrupo VB-G42: resultados das flechas finais

Tabela 6.33 – Subgrupo VB-G42: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G421	28.85	29.71	-14.74	-15.12
VB-G422	26.12	4.64	-4.53	-22.96
VB-G423	16.27	0.19	2.67	-18.38
Média	23.75	11.51	7.32	18.82

O MEV-Branson apresentou a menor média percentual de diferença de flechas finais em relação ao modelo do Analest, e dessa vez o método simplificado Branson-NBR foi o que apresentou a maior média de diferença (23.75%). Observa-se novamente que há uma variação das diferenças percentuais para cada método/modelo com a variação da taxa de armadura das vigas.

6.3.6 Grupo VB-G5

São estudadas seis vigas neste grupo com resistência característica do concreto (f_{ck}) de 20 MPa.

Tabela 6.34 – Grupo VB-G5: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
20	26.6	2.210	21287.367	0.002	5.97

Subgrupo VB-G51

Este subgrupo é formado por três vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído com geometria conforme figura 6.78 e armação e carregamento conforme a tabela 6.34.

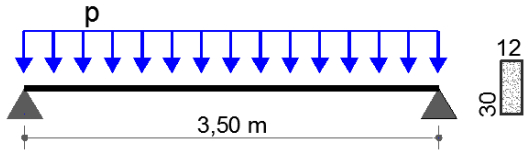


Figura 6.77 – Subgrupo VB-G51: geometria e carregamento

Tabela 6.35 – Subgrupo VB-G51: carregamento e armação

Viga	p_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP} > M_r$ (% vão)
		barras	cm ²			
VB-G511	4.13	2 ϕ 8,0	1.01	0.28	0.04395	23.43
VB-G512	8.25	3 ϕ 10,0	2.36	0.66	0.07615	72.57
VB-G513	12.38	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.10386	82.86

Os resultados obtidos para cada viga estão nos gráficos carga aplicada versus flecha no meio do vão a seguir.

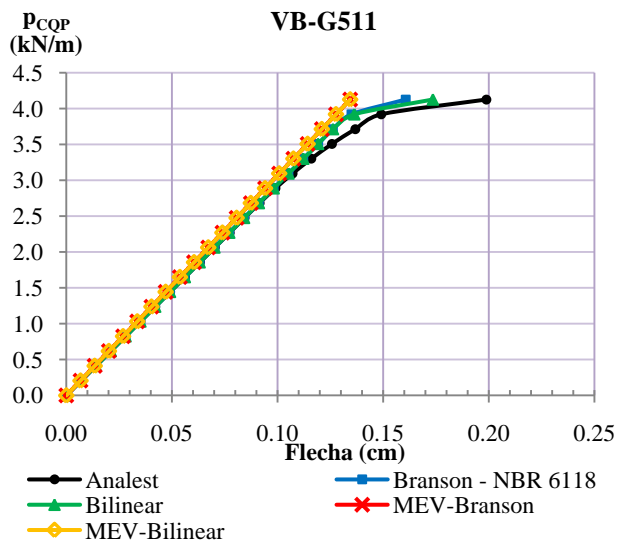


Figura 6.78 – VB-G511: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

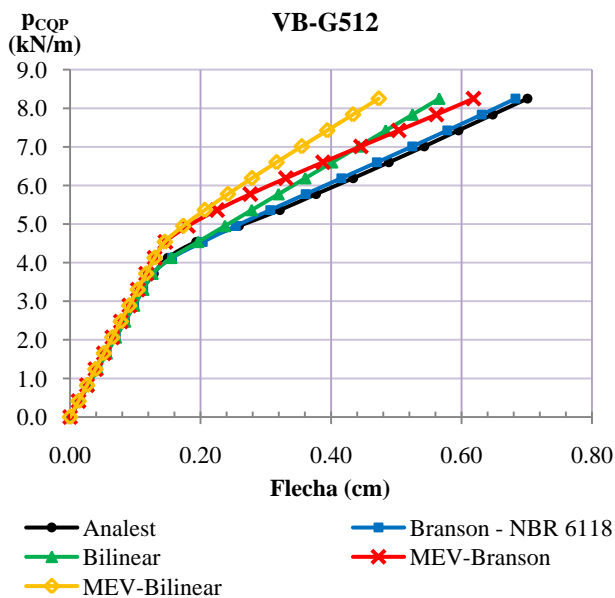


Figura 6.79 – VB-G512: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

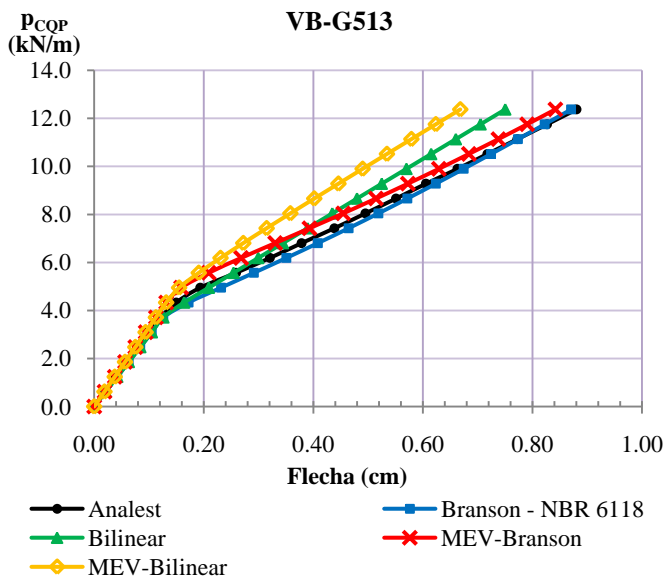


Figura 6.80 – VB-G513: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Percebe-se, pelos gráficos anteriores, que o método simplificado Branson-NBR apresentou comportamento das curvas carga versus flecha das vigas 2 e 3 mais próximo ao das curvas do modelo do Analest, o qual mostrou, neste subgrupo, os maiores valores de flecha, ao contrário do que ocorreu nos demais grupos já estudados, onde o modelo do Analest apresentou, na maioria dos casos, resultados intermediários dentre os demais modelos e métodos estudados. O MEV-Bilinear apresentou os menores valores de flecha para um mesmo nível de carga, devido, conforme observado nas outras vigas já estudadas, à maior rigidez no trecho da curva pós-fissuração, seguido pelo método Bilinear, com rigidez similar ao MEV-Bilinear, porém com carga de início de fissuração menor.

As flechas finais obtidas para cada viga e cada modelo/método, para a carga total de serviço, estão no gráfico a seguir, onde se pode visualizar a variação dos resultados de viga para viga e de modelo para modelo.

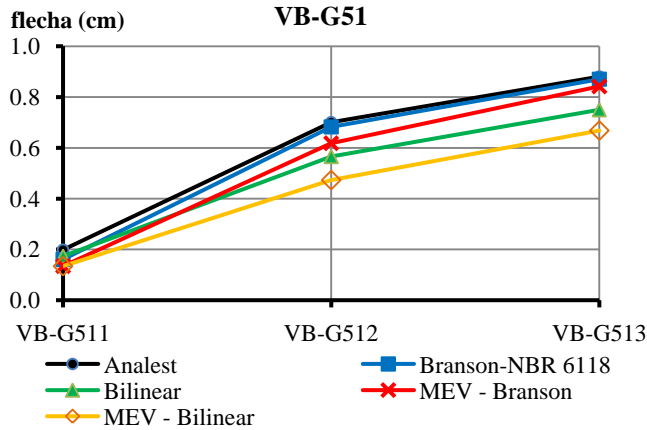


Figura 6.81 – Subgrupo VB-G51: resultados das flechas finais

Tabela 6.36 – Subgrupo VB-G51: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G511	-19.21	-12.73	-32.41	-32.41
VB-G512	-2.61	-19.27	-11.80	-32.51
VB-G513	-1.12	-14.79	-4.39	-24.10
Média	7.65	15.60	16.20	29.67

Analisando os valores de diferença percentual da tabela 6.36, percebe-se que o método simplificado Branson-NBR apresentou a menor diferença de média percentual, com valores bem próximos aos do modelo Analest para as vigas VB-G512 e VB-G513. O MEV-Bilinear apresentou a maior média de diferença percentual, quase 30%, com todos os valores de flecha final menores que os obtidos pelo modelo do Analest. Ainda se observa que para cada método/modelo as diferenças percentuais variam de acordo com a taxa de armadura das vigas.

Subgrupo VB-G52

Este subgrupo também é formado por 3 vigas que estão submetidas a carga concentrada e possuem a mesma geometria do subgrupo VB-G5, com carregamento e armação conforme tabela 6.37.

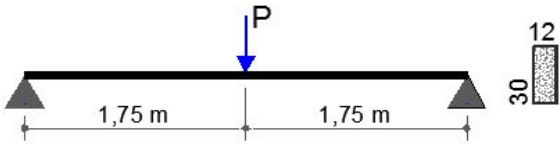


Figura 6.82 – Subgrupo VB-G52: geometria e carregamento

Tabela 6.37 – Subgrupo VB-G52: carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN)	p_{COP} (kN/m)	A_s		ρ (%)	α	$M_{COP} > M_r$ (% vão)
			barras	cm ²			
VB-G521	5.48	0.90	2 ϕ 8,0	1.01	0.28	0.04395	4.29
VB-G522	13.13	0.90	3 ϕ 10,0	2.36	0.66	0.07615	56.29
VB-G523	20.78	0.90	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.10386	70.86

Os resultados encontrados separados por viga estão nos gráficos a seguir.

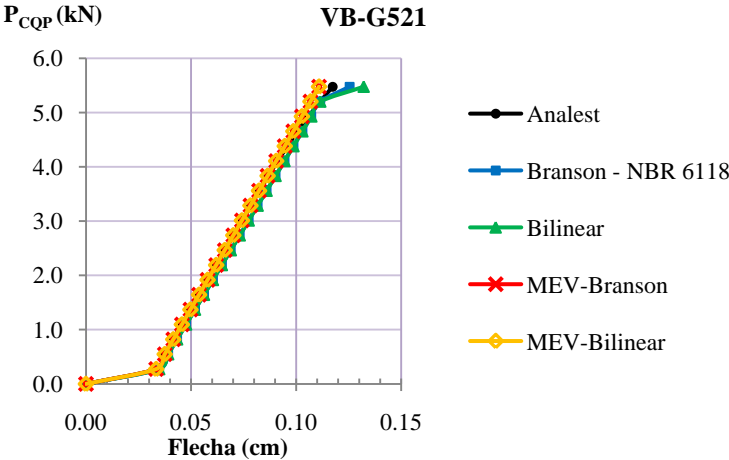


Figura 6.83 – VB-G521: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

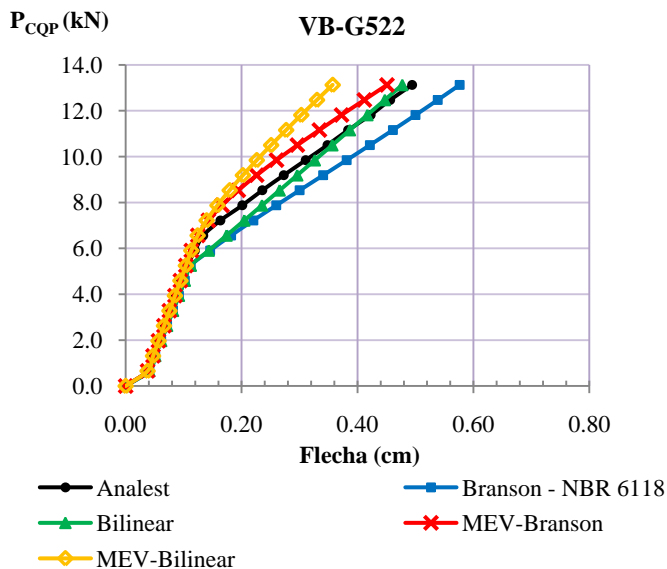


Figura 6.84 – VB-G522: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

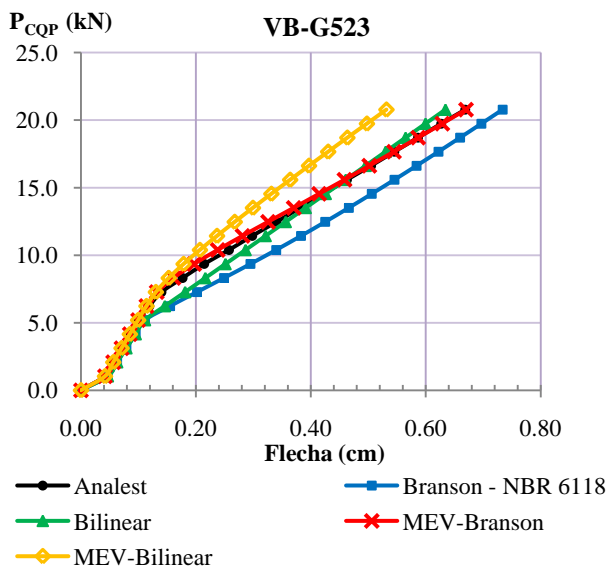


Figura 6.85 – VB-G523: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

O MEV-Branson e o método bilinear apresentaram resultados mais próximos ao do modelo do Analest, enquanto o método Branson-NBR apresentou os maiores valores de flecha e o MEV-Bilinear os menores, para o mesmo nível de carga aplicada.

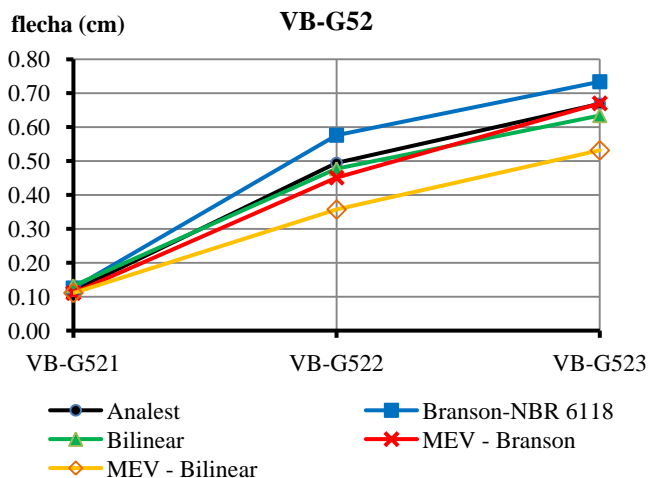


Figura 6.86 – Subgrupo VB-G52: resultados das flechas finais

Tabela 6.38 – Subgrupo VB-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G521	6.89	12.56	-5.50	-5.50
VB-G522	16.59	-3.44	-8.77	-27.75
VB-G523	9.72	-13.56	5.63	-20.67
Média	11.07	9.85	6.63	17.97

Para este grupo o MEV-Branson apresentou a menor média de diferença percentual (6,63%) de flecha final, enquanto que o MEV-Bilinear a maior (17,97%), em relação ao modelo do Analest.

6.3.7 Análise dos resultados

Após a apresentação de todas as vigas biapoiadas estudadas, separadas em seus respectivos grupos e subgrupos, apresenta-se neste item a análise total dos resultados obtidos das flechas finais calculadas pelos diferentes métodos e modelos, tendo como referência os resultados do modelo do Analest, comentando-se também sobre o comportamento observado nas curvas carga-flecha.

Na tabela 6.39 encontram-se as médias das diferenças percentuais dos resultados de flecha final (correspondente à carga máxima de serviço) separados por método em relação aos resultados do Analest. A tabela contém a média das diferenças percentuais negativas, ou seja, vigas que apresentaram flechas menores que as do Analest, a média das vigas com diferença percentual positiva, a Média 1, calculada com as diferenças percentuais em módulo considerando todas as vigas (a mesma média calculada na análise de cada grupo) além da Média 2, calculada com todos os resultados das diferenças percentuais, considerando-se o sinal, e na última coluna o desvio padrão.

Tabela 6.39 – Diferença percentual média de flecha final para todas as vigas em relação ao Analest (%)

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-5.37	9	10.03	32	9.00	6.65	10.40
Bilinear	-10.77	24	6.87	17	9.15	-3.46	10.95
MEV-Branson	-9.46	26	2.41	15	6.88	-5.12	9.31
MEV-Bilinear	-18.69	41	0.00	0	18.69	-18.69	9.25

No próximo gráfico são mostradas as médias finais (Média 1) de cada modelo, para a melhor visualização dos resultados finais.

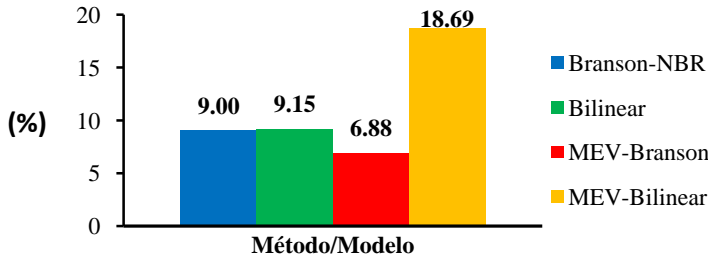


Figura 6.87 – Média 1 das diferenças percentuais dos métodos em relação aos resultados do Analest

Como já percebido nas análises de cada subgrupo, o MEV-Branson apresentou a menor variação das flechas finais em relação ao modelo do Analest pela Média 1, 6,9%. Isto se deve ao fato de, conforme já comentado anteriormente, além de ter apresentado valor de carga correspondente à transição de estágio I para o estágio II na seção analisada similar ao do modelo do Analest, também ter apresentado rigidez próxima à do modelo do Analest no trecho pós-fissuração, o que resultou, para muitas vigas, em curvas carga-flecha bem próximas. O método simplificado Branson-NBR, que adota um valor de rigidez equivalente para todo o vão, obteve diferença percentual média das flechas finais em relação ao modelo do Analest de 9,0% (Média 1), cerca de 2% maior. Essa diferença se explica pelo fato de se tratar de um método simplificado, logo não é considerada a variação do nível de fissuração e da taxa de armadura ao longo da viga, apresentando então, na maioria das vigas, um valor da carga correspondente à mudança do estágio I para estágio II na seção analisada menor e, tendo rigidez semelhante ao MEV-Branson e ao modelo do Analest no trecho pós-fissuração, resulta em valores de deslocamentos maiores para um mesmo nível de carga, para a maioria das vigas estudadas (80% das vigas com valores de flecha final maior que do modelo do Analest).

O método simplificado Bilinear apresentou resultados das flechas finais com diferença média de 9,2% (Média 1) e, pela Média 2, apresentou a menor diferença média (-3,5%) entre os métodos, mas porém com o maior desvio padrão entre os métodos (10,95%). Já o modelo MEV-Bilinear apresentou a maior média de diferença em relação aos resultados do modelo do Analest (18,7% pela Média 1 e -18,7% pela Média 2), com valores das flechas finais sempre abaixo dos do Analest, o que se explica por apresentar rigidez da curva carga-flecha no trecho pós-fissuração sempre maior que os demais modelos e ainda, em algumas vigas, valor de carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II na seção analisada um pouco maior, resultando, assim, em valores menores de deslocamentos. Já o método simplificado Bilinear, assim como o Branson-NBR, apresentou, na maioria das vigas, valor de carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II na seção analisada menor que do modelo do Analest, mas com rigidez maior, similar ao do MEV-Bilinear, levando a resultados de flechas finais, ora acima ora abaixo dos valores de referência.

Apesar de o MEV-Bilinear, assim como o MEV-Branson, considerar a variação do nível de fissuração e da taxa de armadura ao longo da viga, o que é possível já que o modelo consiste na discretização da viga em diversos elementos de pequena extensão, calculando-se um

valor de rigidez EI para cada elemento, percebe-se que ocorreu com o MEV-Bilinear e o método Bilinear o contrário do que ocorreu com o MEV-Branson e o método Branson-NBR, onde o modelo refinado foi o que mais se aproximou dos resultados do modelo do Analest. Analisando os resultados obtidos e a formulação utilizada no MEV-Bilinear e no método simplificado Bilinear, observa-se que, ao se utilizar o mesmo coeficiente de ponderação ζ utilizado no método simplificado que, como visto em 2.2.2, leva em consideração a contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça e considera também que parte da extensão do vão ainda se encontra no estágio I, constatou-se que não foi adequado levar em conta este último fator mencionado para o MEV-Bilinear, já que, como a rigidez é calculada para um elemento de pequena extensão, ou o elemento está todo fissurado, ou ainda está no estágio I, explicando-se assim, a obtenção de flechas pelo MEV-Bilinear no trecho pós-fissuração menores e mais distantes do modelo de referência

A variação das diferenças percentuais dos resultados de flecha final obtidos pelos diferentes métodos em relação aos obtidos pelo modelo do Analest pode ser visualizada nos próximos gráficos em função da taxa de armadura (da seção do meio do vão) e após nos gráficos em função da porcentagem do vão da viga que está fissurado.

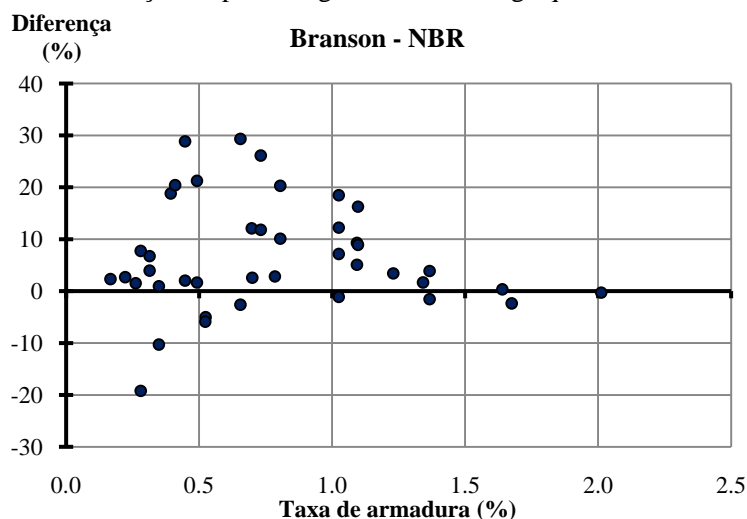


Figura 6.88 – Branson-NBR: diferença percentual-taxa de armadura

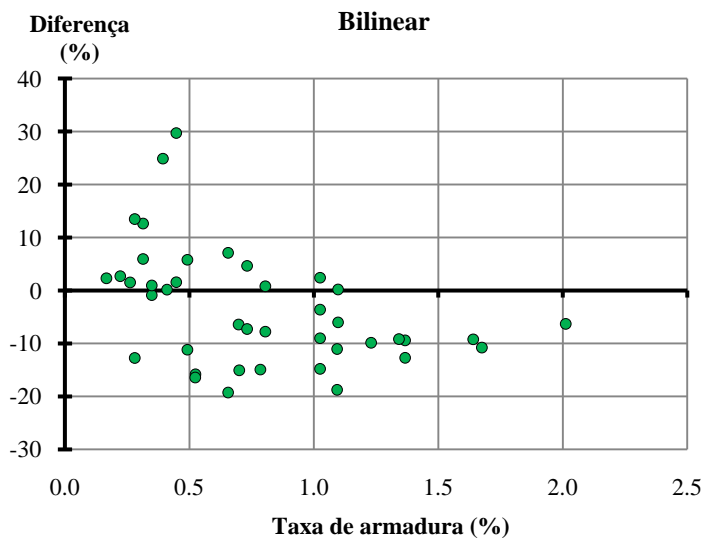


Figura 6.89 – Bilinear: diferença percentual – taxa de armadura

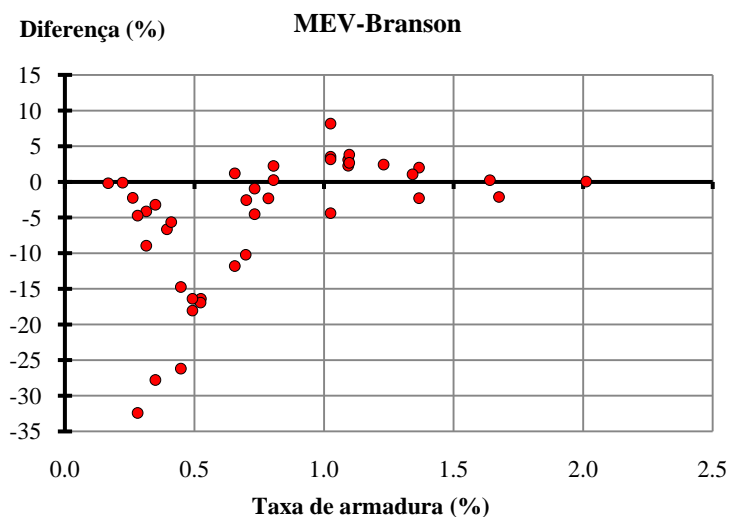


Figura 6.90 – MEV-Branson: diferença percentual-taxa de armadura

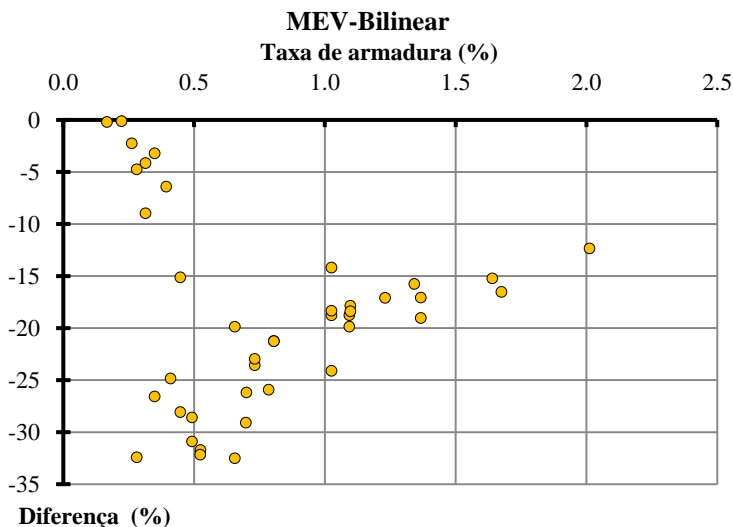


Figura 6.91 – MEV-Bilinear: diferença percentual-taxa de armadura

Analisando as figuras 6.89 a 6.92, verifica-se que há uma maior dispersão das diferenças percentuais dos resultados em relação ao Analest para taxas de armadura abaixo de 0,5%. Acima deste valor, entre 0,5% e 1,2% a faixa de variação diminui um pouco. Para taxas acima de 1,2% o método simplificado Branson-NBR apresentou diferenças menores que 10% assim como o MEV-Branson, com diferenças menores que 5% para as vigas com taxas de armadura elevadas. No método Bilinear e MEV-Bilinear também se percebe a diminuição da variação das diferenças percentuais para as taxas mais elevadas de armadura, o que pode se explicar pelo fato de, para maiores valores de taxa de armadura, as vigas estarem solicitadas por valores de carregamento maiores e por isso mais fissuradas, diminuindo então, a contribuição do concreto fissurado e também a influência da parte da extensão do vão que não fissurou na rigidez da viga, consequentemente, a variabilidade das diferenças percentuais dentro de cada método.

As próximas figuras mostram a diferença percentual das flechas finais calculadas em relação às obtidas pelo modelo do Analest, separadas por modelo, em função da extensão do vão fissurado de cada viga.

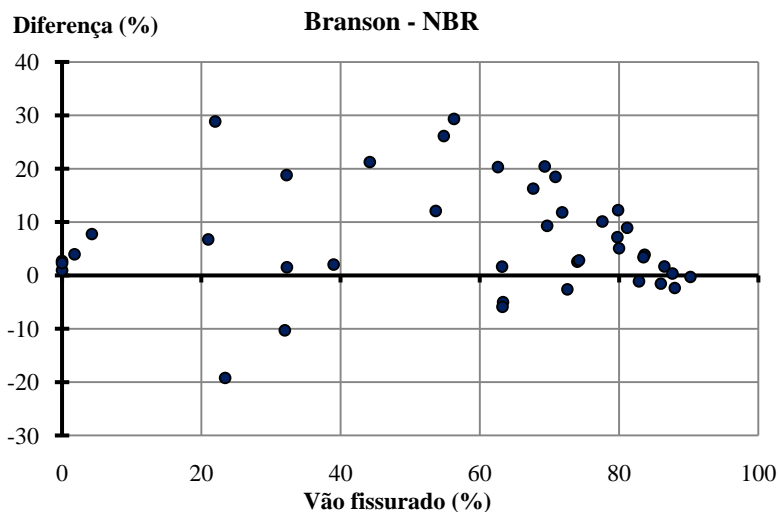


Figura 6.92 – Branson-NBR: diferença percentual-vão fissurado

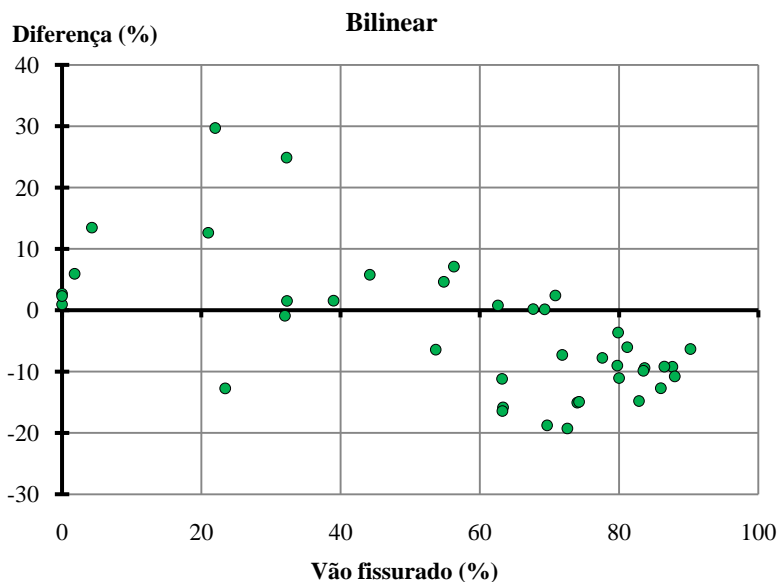


Figura 6.93 – Bilinear: diferença percentual-vão fissurado

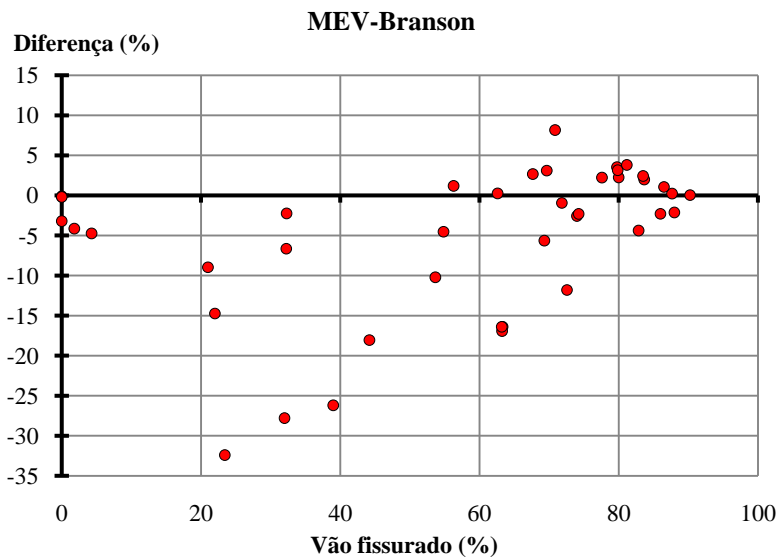


Figura 6.94 – MEV-Branson: diferença percentual-vão fissurado

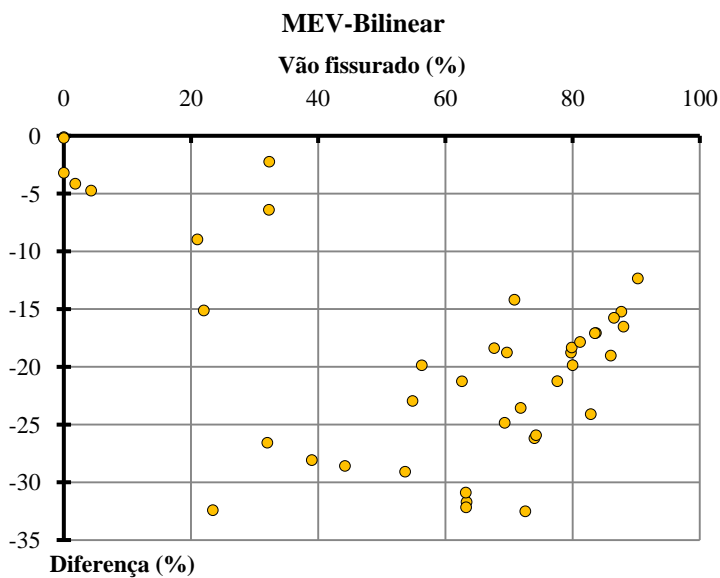


Figura 6.95 – MEV-Bilinear: diferença percentual-vão fissurado

Ao se observar as figuras 6.93 a 6.96, constata-se que para extensões de vãos fissurados entre 20% e 40% as flechas obtidas pelos diversos métodos apresentam grande variabilidade em relação às obtidas pelo modelo do Analest, dispersão que vai diminuindo conforme a extensão do vão fissurado aumenta, tornando-se pequena a partir de 80% do vão fissurado, o que pode ser explicado pelo fato de nestas vigas o concreto fissurado influenciar pouco na sua rigidez.

Na tabela 6.40 os resultados das diferenças percentuais das flechas finais obtidas por cada modelo/método em relação às calculadas pelo modelo do Analest são dispostos dentro de faixas de variação de $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$, onde se indica o número de vigas que se enquadra no intervalo, e também a porcentagem do número total (41 vigas) que estas vigas representam.

Pode-se observar que, no intervalo de variação de $\pm 10\%$, o modelo MEV-Branson apresenta maior número de vigas, enquanto que o MEV-Bilinear teve pouco mais da metade das vigas enquadradas dentro da faixa de $\pm 20\%$, modelo este, que foi o que obteve maior diferença percentual média em relação ao modelo do Analest, conforme já ressaltado.

Tabela 6.40 - Distribuição das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest dentro dos intervalos de $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$

Método/Modelo	$\pm 20\%$		$\pm 10\%$	
	(%)	nº vigas	(%)	nº vigas
Branson-NBR	85.4	35	63.4	26
Bilinear	95.1	39	61.0	25
MEV - Branson	92.7	38	75.6	31
MEV - Bilinear	58.5	24	19.5	8

Análise dos resultados pelo tipo de carregamento

Os subgrupos dos grupos VB-G3, VB-G4 e VB-G5 tiveram suas vigas solicitadas à combinação de carregamento que resultou em solicitação (momento fletor) na seção central igual para as vigas equivalentes nos subgrupos, por exemplo, momento fletor (MF) da viga VB-G311 (carga distribuída) é de valor similar ao MF da viga VB-G321 (carga concentrada). Logo, o dimensionamento das armaduras longitudinais de flexão resultou em armaduras iguais, apenas com

algumas diferenças no detalhamento ao longo da viga devido à diferença do diagrama de momento fletor.

Adotada esta metodologia, é possível, então, comparar as flechas obtidas entre os subgrupos para cada grupo. O que se constatou foi que as flechas obtidas para as vigas com carga distribuída foram sempre maiores que as vigas com carga concentrada, como pode ser visto na figura 6.97, que contém as flechas calculadas pelo modelo do Analest.

Para os outros métodos, ocorreu a mesma situação, o que se explica pelas vigas biapoiadas submetidas à carga uniformemente distribuída possuírem diagrama de MF com variação parabólica, o que leva a terem esforços maiores ao longo da viga em comparação ao diagrama de MF de uma viga biapoiada submetida à carga concentrada, que tem variação linear.

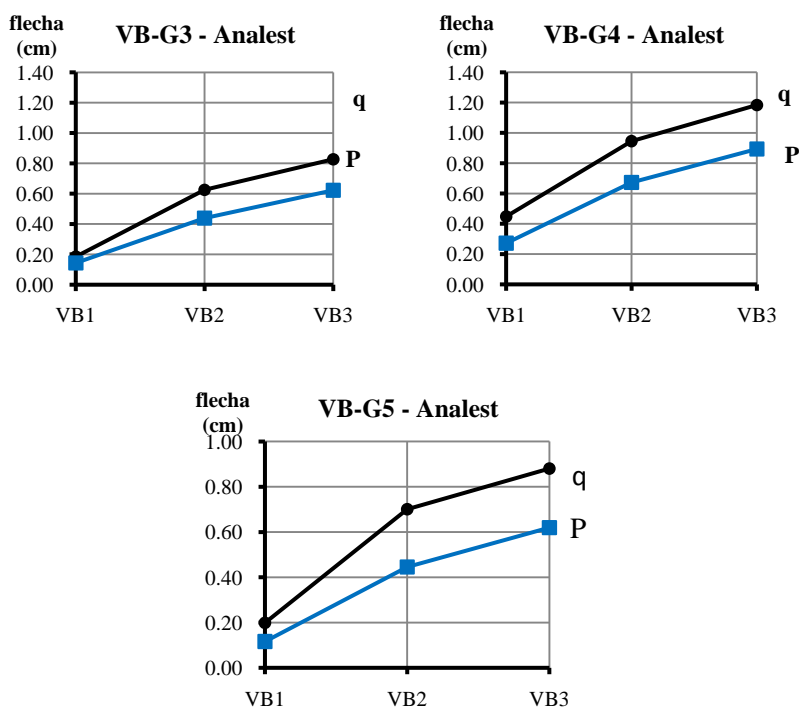


Figura 6.96 – Comparação das flechas obtidas pelo Analest entre subgrupos

Separando todas as vigas biapoiadas estudadas em dois grupos, um formado pelas vigas submetidas à carga distribuída e o segundo pelas vigas submetidas à carga concentrada, obteve-se separadamente as médias das diferenças percentuais das flechas finais em relação às flechas calculadas pelo modelo do Analest, mostradas nas tabelas seguintes, primeiramente para as vigas com carregamento distribuído.

Tabela 6.41 – Médias das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest das vigas submetidas a carregamento distribuído

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-5.37	9	5.41	17	5.40	1.68	7.32
Bilinear	-10.94	21	8.81	5	10.53	-7.14	9.68
MEV-Branson	-10.50	17	1.96	9	7.54	-6.19	10.38
MEV-Bilinear	-20.02	26	0.00	0	20.02	-20.02	9.29

Analisando somente as vigas com carga distribuída, que somam no total 26 das 41 vigas biapoiadas estudadas, verifica-se que as médias se alteraram em relação às médias calculadas para todas as vigas. Nesta análise, o método simplificado Branson-NBR apresentou a menor média de variação em relação ao Analest, tanto pela Média 1 (5,4%) quanto pela Média 2 (1,7%) e também com o menor desvio padrão, seguido pelo MEV-Branson com Média 1 de 7,5%. A maior média foi apresentada pelo MEV-Bilinear, com 20%, similar à média obtida calculada para todas as vigas (18,7%).

A tabela 6.42 apresenta as diferenças percentuais das flechas finais calculadas pelos diferentes métodos em relação ao modelo do Analest, para as vigas submetidas à carga concentrada, que somam 15 das 41 vigas biapoiadas estudadas.

Tabela 6.42 - Média das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest das vigas submetidas a carga concentrada

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	0.00	0	15.25	15	15.25	15.25	9.38
Bilinear	-9.60	3	6.06	12	6.76	2.92	10.33
MEV-Branson	-7.50	9	3.09	6	5.74	-3.27	7.02
MEV-Bilinear	-16.38	15	0.00	0	16.38	-16.38	9.02

Já para as vigas submetidas à carga concentrada, o método Bilinear e o MEV-Branson apresentaram as menores médias de diferença percentual, 6,76% e 5,74% respectivamente (Média 1), em relação ao modelo do Analest, mas o método Bilinear apresentou, também, o maior desvio padrão. A aplicação da fórmula de Branson de forma simplificada (Branson-NBR) para esta situação levou a resultados em média bem maiores que os do Analest. O MEV-Bilinear novamente apresentou a maior diferença em relação ao modelo do Analest, mas ao contrário do Branson-NBR, com todos os resultados menores que os do Analest.

Na figura 6.98 estão mostrados os valores de Média 1 encontrados pela análise separada das vigas com carga distribuída e com carga concentrada. Pode-se visualizar as diferenças entre os dois casos, onde a grande diferença apresentada foi pelo método Branson-NBR que mostrou resultados em média mais próximos do Analest para as vigas com carga distribuída, o contrário do que ocorreu para o método Bilinear, que mostrou resultados mais próximos para o caso das vigas com carga concentrada.

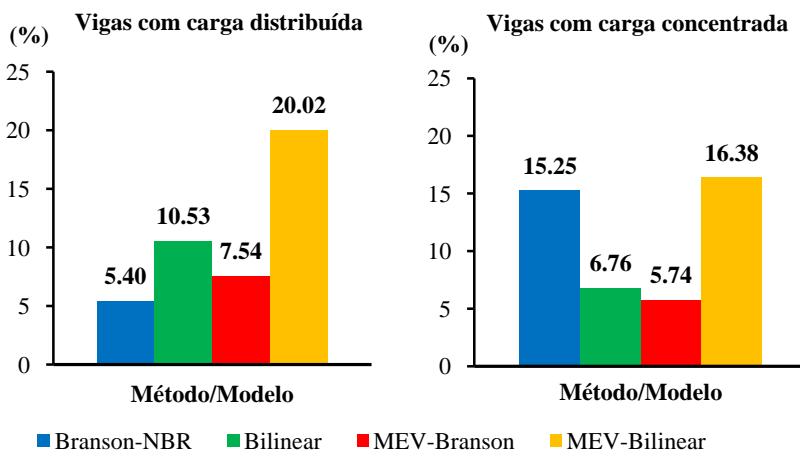


Figura 6.97 – Média 1 das diferenças percentuais em relação aos resultados do Analest das vigas submetidas a carga distribuída e carga concentrada

Neste capítulo foram apresentados os estudos sobre flecha imediata para vigas biapoiadas, no próximo capítulo serão apresentados os estudos realizados com vigas contínuas.

7 VIGAS CONTÍNUAS

Neste capítulo são apresentados os estudos realizados com vigas contínuas sobre os diferentes métodos e modelos para cálculo de flecha imediata. Primeiramente são apresentadas as vigas com resultados experimentais. Após estão detalhadas as vigas de projeto de dois vãos e em seguida as com três vãos. São adotadas as mesmas considerações descritas em 6.1 sobre o dimensionamento e metodologia do estudo.

Estuda-se, além dos métodos e modelos empregados para as vigas biapoiadas, a aplicação da fórmula de Branson conforme os comentários técnicos da NB-1 publicados pelo Ibracon (Branson-Ibracon) que somente se aplica às vigas contínuas.

Foram estudadas no total 60 vigas contínuas de projeto, sendo 44 de dois vãos e 16 vigas de 3 vãos. O tipo de carregamento predominante adotado nos estudos foi a carga distribuída uniformemente, por ser o caso mais freqüente em vigas de edificações usuais de concreto armado. A seção analisada é a que apresenta a flecha máxima ao longo da viga. Todas as vigas estudadas possuem geometria e carregamento simétrico com exceção dos grupos VCA-G1 e VCA-G2 que tem geometria assimétrica.

Para o cálculo das flechas das vigas de projeto pelo modelo de EF do Analest, a seção transversal das vigas é dividida em 20 camadas e o efeito “tension stiffening” é considerado em 5 camadas. As vigas são discretizadas em elementos de 10 cm de comprimento, tanto para cálculo pelo programa Analest, quanto para a entrada de dados no programa AVSer. Para o cálculo pelo modelo MEV-Branson, assim como para as vigas biapoiadas, foi adotado o coeficiente m igual a 4 e no cálculo da rigidez equivalente EI_{eq} foi usado um único valor por elemento.

As vigas teóricas estudadas nos itens 7.2 e 7.3 estão separadas em grupos, onde a geometria e dados do concreto são iguais dentro de cada grupo. Alguns grupos estão divididos em subgrupos que se diferenciam pelo tipo de carregamento (carga uniformemente distribuída ou carga concentrada no meio do vão). Cada subgrupo é formado por 4 vigas com carregamento e armação diferentes.

Para a armação longitudinal de todas as vigas de projeto estudadas foi adotado Aço CA-50, da mesma forma como utilizado para as vigas biapoiadas, sendo então seguidas as mesmas propriedades que são mostradas na tabela 6.12. As propriedades do concreto são calculadas a partir da resistência à compressão, f_{ck} , como já descrito no item 5.1.

No próximo item apresentam-se as vigas com resultados experimentais, no item 7.2 as vigas de projeto de dois vãos e, no item 7.3, as de três vãos.

7.1 Vigas contínuas: comparação entre resultados numéricos e experimentais

Pretende-se, ao se comparar resultados experimentais com os modelos teóricos, avaliar a precisão que estes fornecem, enfatizando aqui o modelo de EF implementado no Analest, que servirá de referência na comparação dos resultados entre os diferentes modelos e métodos estudados. Encontrou-se, porém, dificuldade na obtenção de vigas contínuas que tenham sido ensaiadas experimentalmente, ficando esta avaliação limitada.

Stramandinoli (2007) comparou os resultados experimentais de algumas vigas contínuas disponíveis na literatura com os resultados obtidos pelos modelos implementados no Analest. O modelo utilizado nesta dissertação é o que segue as hipóteses de Bernoulli, o qual apresentou bons resultados para as vigas armadas adequadamente ao cisalhamento, onde o efeito do cisalhamento é pequeno.

7.1.1 Vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)

Uma série de 5 vigas de dois vãos foi ensaiada por Leonhardt e Walther (1962), sendo que os dados aqui mostrados foram obtidos de D'Ávila (2003). As vigas possuem características diferentes, sendo os dados referentes à geometria, armação e características dos materiais mostrados a seguir.

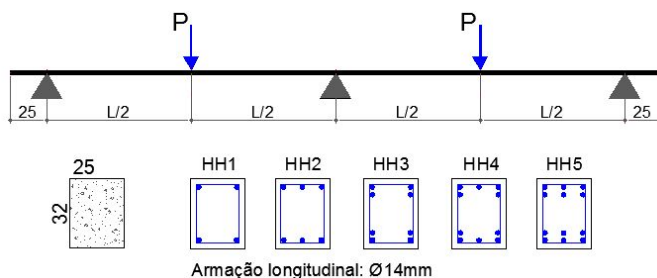


Figura 7.1 – Geometria e armação longitudinal das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)

A próxima tabela contém os dados do concreto das vigas, a resistência cúbica à compressão do concreto (f_{cub}) foi obtida experimentalmente na data dos ensaios, os demais dados foram obtidos de D'Ávila (2003), que por sua vez os obteve de Campos Filho (1987), com exceção do módulo de elasticidade E_{ci} que foi calculado pela fórmula 3.78 em função da resistência média à compressão, f_{cm} . A seção transversal foi dividida em 20 camadas. Na tabela 7.2 estão os dados do aço, onde a tensão de início de escoamento, f_y , foi obtida experimentalmente.

Tabela 7.1 – Dados da geometria, armação e propriedades do concreto das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)

Viga	L (m)	f_{cub} (MPa)	f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_{ci} (MPa)	ε_0	As' (cm ²)	As (cm ²)	α (em 5 camadas)
HH1	1.11	35.20	29.80	2.69	30939	0.02	3.08	3.08	0.04251
HH2	1.57	35.60	30.20	2.71	31077	0.02	4.62	4.62	0.05428
HH3	2.11	37.10	31.40	2.78	31483	0.02	6.16	6.16	0.06505
HH4	2.57	33.60	28.50	2.60	30482	0.02	7.70	7.70	0.07748
HH5	3.00	36.30	30.80	2.74	31281	0.02	9.24	9.24	0.08637

Tabela 7.2 – Dados do aço das vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962)

ϕ	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ε_u	s.h.
14 mm	417.00	210000	0.02	0.01

Os resultados dos deslocamentos obtidos experimentalmente e pelo modelo do Analest estão mostrados nos gráficos seguintes para cada viga.

Os gráficos mostram que as vigas HH1 e HH2 tiveram maior diferença entre os resultados do modelo teórico e os experimentais, não coincidindo, inclusive, no trecho inicial da curva carga-flecha, indicando que o E_{ci} teórico não equivale ao obtido nos ensaios. Ressalta-se que para obtenção dos valores teóricos de E_{ci} foram aplicados coeficientes empíricos para transformar a resistência à compressão do concreto cúbica em cilíndrica. Pode ter havido também problemas nas medições iniciais da viga HH2 (ou esta já estava fissurada antes do ensaio), pois a curva carga-flecha não apresenta o trecho inicial elástico. Para as demais vigas, que possuem taxa de armadura maior e, portanto, a contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça é menor, a diferença entre as duas curvas diminui, sendo o trecho inicial das curvas das vigas HH4 e

HH5 praticamente coincidente, mas há diferença entre as curvas no trecho de escoamento até a ruptura.

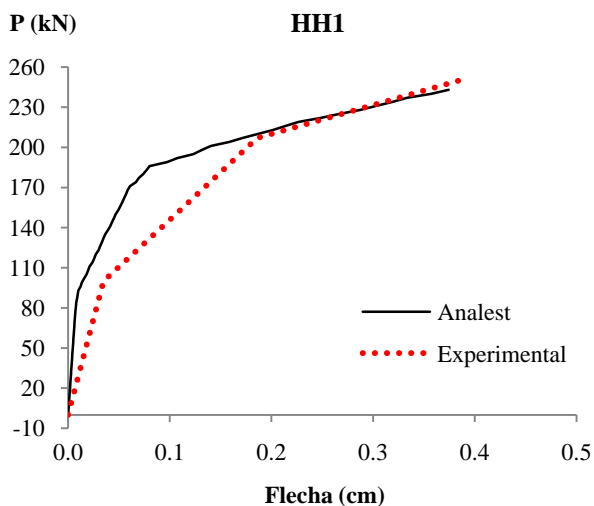


Figura 7.2 – HH1: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

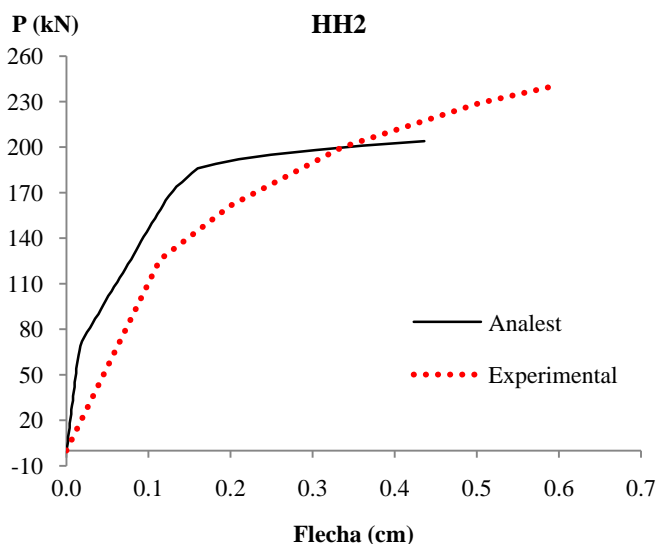


Figura 7.3 – HH2: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

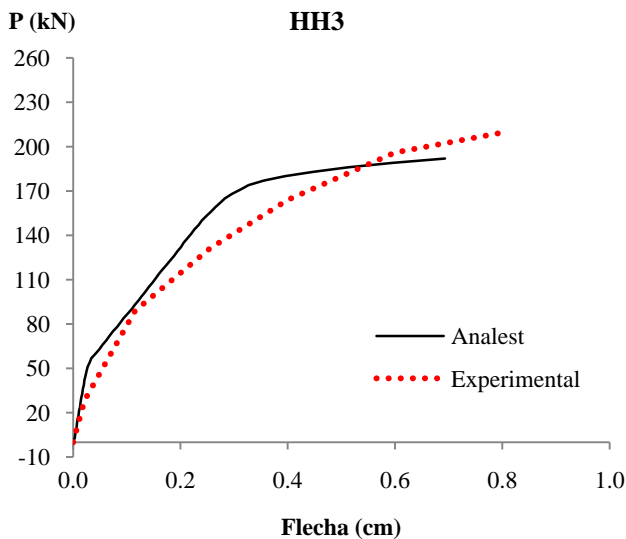


Figura 7.4 – HH3: gráfico carga versus flecha no meio do vão

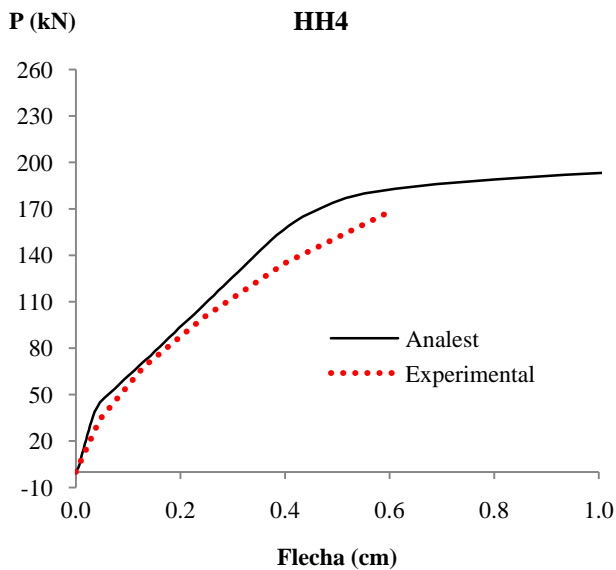


Figura 7.5 – HH4: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

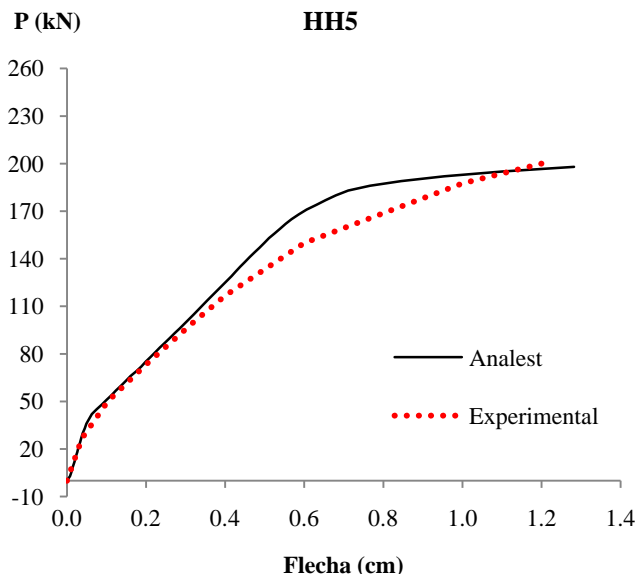


Figura 7.6 – HH5: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

D'Avila (2003) comparou os resultados numéricos obtidos pelo modelo de fissuração distribuída proposto em sua tese com estes resultados experimentais, encontrando, também, resultados similares ao modelo do Analest nos trechos iniciais das curvas carga-deslocamento, sendo também o modelo numérico proposto mais rígido do que o experimental para as vigas HH1 e HH2. No entanto, o modelo proposto por D'Avila mostrou uma melhor aproximação da curva experimental no trecho de escoamento até a ruptura.

Também foram calculadas as flechas pelos demais métodos e modelos estudados e comparados aos resultados experimentais, com os resultados obtidos apresentados nos gráficos das figuras a seguir. As flechas foram calculadas até a carga de início do escoamento do aço.

Para a viga HH1, o MEV-Branson e o MEV-Bilinear apresentaram problemas de convergência a partir da carga de 120 kN, e, para a viga HH2, o MEV-Branson apresentou problemas de convergência a partir de 90 kN.

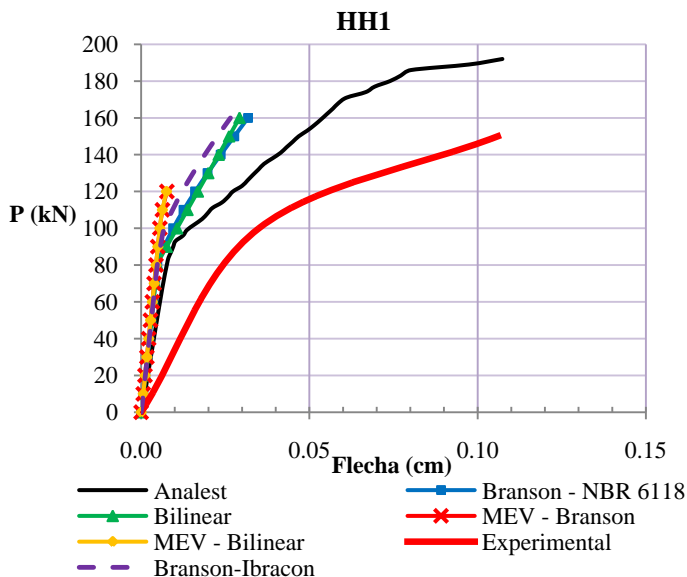


Figura 7.7 – HH1: gráfico carga versus flecha no meio do vão para todos os modelos

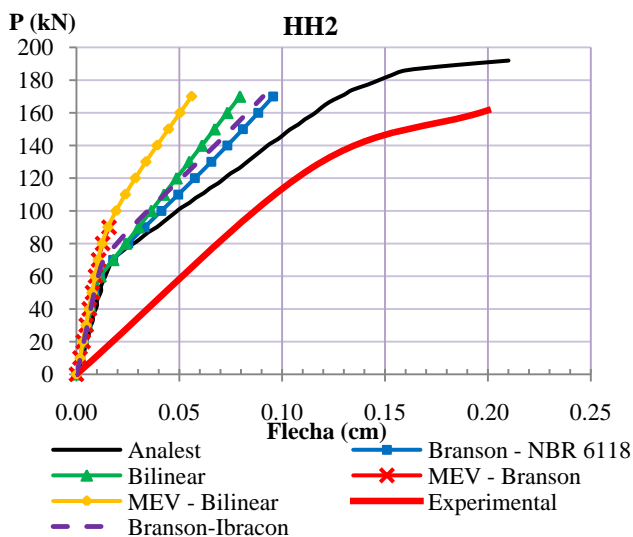


Figura 7.8 – HH2: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos

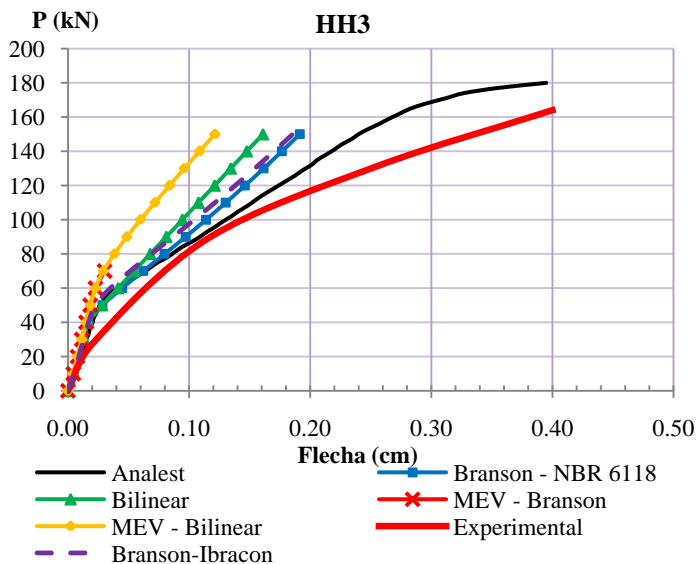


Figura 7.9 – HH3: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos

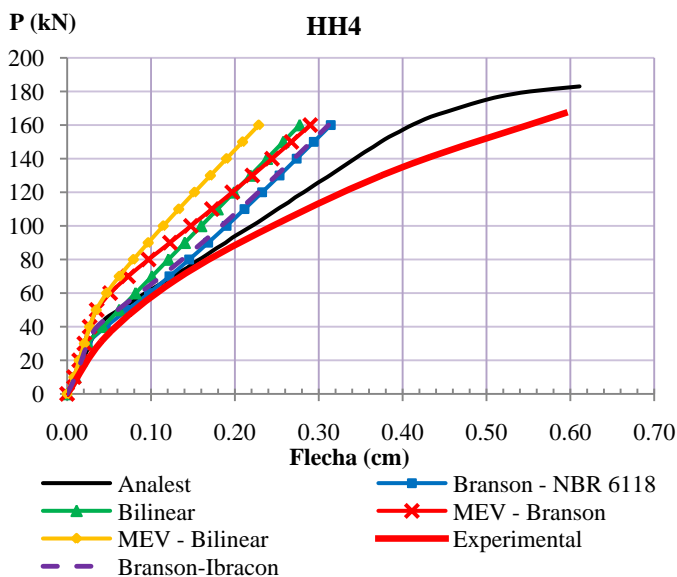


Figura 7.10 – HH4: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos

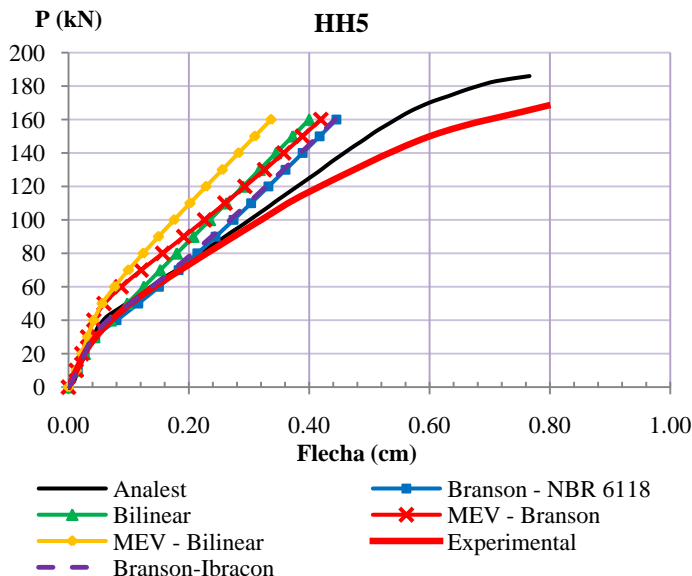


Figura 7.11 – HH5: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos

Observa-se que para todas as vigas o modelo do Analest é o que se aproxima melhor do modelo experimental, sendo que os demais métodos e modelos mostraram uma maior rigidez em relação ao modelo do Analest e do modelo experimental. Os modelos de MEV-Branson e MEV-Bilinear apresentaram o valor da carga correspondente à mudança de estágio I para o estágio II na seção analisada um pouco maior do que os outros métodos e modelo experimental. O MEV-Bilinear foi o que apresentou a curva carga-flecha mais distante da curva experimental em todas as vigas.

7.1.2 – Viga ensaiada por Cruz (1996)

A viga contínua de dois vãos denominada V1A-40, ensaiada por Cruz (1996), tem geometria conforme figura 7.12 e armação detalhada na figura 7.13. Stramandinoli (2007), em sua tese, já comparou os resultados experimentais aos calculados pelos modelos do Analest, mas aqui é novamente feita a comparação dos resultados experimentais com esse modelo e também com os demais métodos e modelos estudados, devido à indisponibilidade de novos exemplos.

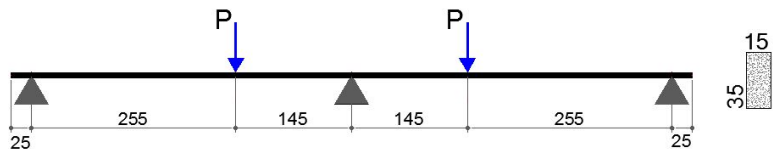


Figura 7.12 – V1A-40: geometria e carregamento

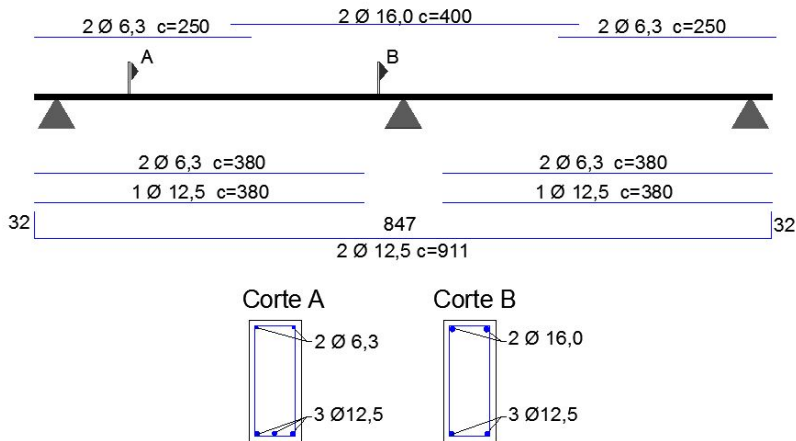


Figura 7.13 – V1A-40: detalhamento da armadura longitudinal

Nas tabelas 7.3 e 7.4 estão os dados do concreto e aço, respectivamente, da viga V1A-40. Os dados em **negrito** foram obtidos experimentalmente.

Tabela 7.3 – V1A-40: propriedades do concreto e dados da seção analisada

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	E_{ci} (MPa)	ϵ_0	α (em 5 camadas)	nº camadas
40.80	2.92	34355.15	0.002	0.0545/ 0.05	20

Tabela 7.4 – V1A-40: propriedades do aço

ϕ	f_y (MPa)	E_s (Mpa)	ϵ_u	s.h.
6.3 mm	647	196000	0.025	0.0219
12.5 mm	580	193000	0.024	0.0197
16 mm	547	202000	0.054	0.0266

No próximo gráfico mostram-se os resultados experimentais e os resultados obtidos pelo modelo do Analest, para deslocamentos (flechas) obtidos no meio de cada um dos vãos.

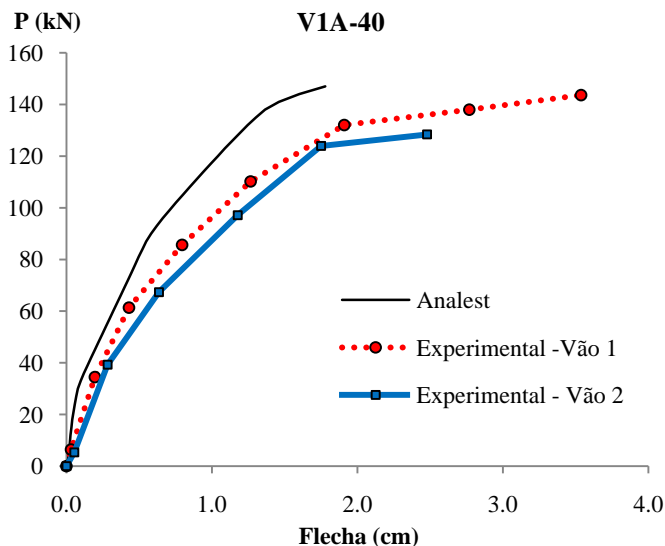


Figura 7.14 – V1A-40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão

Observa-se das curvas carga-flecha que o modelo do Analest se mostrou um pouco mais rígido do que o modelo experimental, havendo diferenças, também, no trecho de escoamento até a ruptura. No próximo gráfico estão mostrados os resultados obtidos pelos demais modelos e métodos estudados. O modelo MEV-Branson não apresentou convergência na solução e por isso não aparece no gráfico.

O modelo MEV-Bilinear novamente apresentou a curva carga-flecha mais afastada da curva dos resultados experimentais, enquanto que o método simplificado Branson-NBR foi o que mais se aproximou do modelo experimental dentre todos os modelos teóricos.

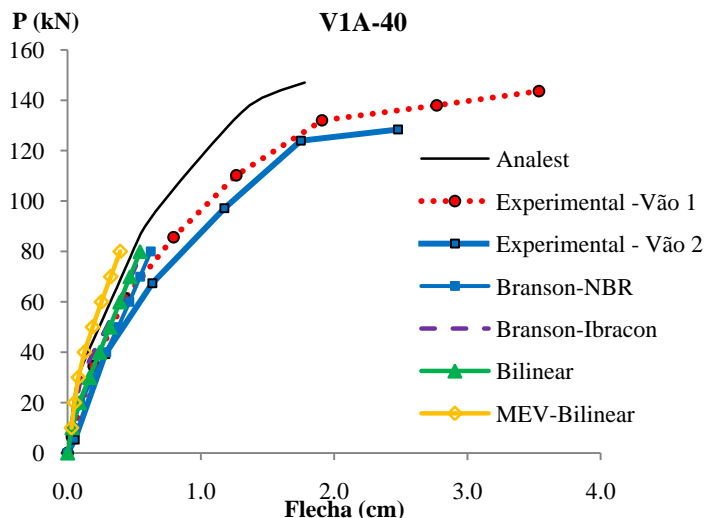


Figura 7.15 – V1A-40: gráfico carga aplicada versus flecha no meio do vão para todos os modelos

Ressalta-se que nas vigas contínuas a acurácia dos métodos/modelos é menor do que a obtida para vigas biapoiadas, tendo em vista que todos os modelos baseiam-se apenas no comportamento de flexão e nas vigas biapoiadas há pouca fissuração por cisalhamento. Já nas vigas contínuas, onde nos apoios intermediários atuam simultaneamente momento fletor e esforço cortante (e em geral são os esforços máximos), há uma maior fissuração devido ao cisalhamento, com fissuras inclinadas na região do apoio. Os modelos de EF de barras baseados na Teoria de Viga de Timoshenko fornecem uma aproximação melhor ao comportamento observado experimentalmente em ensaios de vigas contínuas (ver Stramandinoli, 2007).

7.2 Vigas contínuas de dois vãos

Nos próximos itens estão dispostos os estudos teóricos realizados com vigas contínuas de dois vãos submetidas a carregamento de serviço. São estudadas 44 vigas contínuas de 2 vãos, sendo 8 vigas de geometria assimétrica. Analogamente ao estudo realizado para vigas biapoiadas, o modelo do Analest será usado como referência na comparação dos diversos métodos/modelos.

7.2.1 Grupo VC-G1

As propriedades do concreto e o momento de início de fissuração da seção das vigas desse primeiro grupo estudado estão na tabela 7.5. O grupo é dividido em dois subgrupos, sendo o primeiro submetido a carregamento uniformemente distribuído e o segundo a carga concentrada no meio do vão.

Tabela 7.5 – Grupo VC-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
20.00	26.60	2.21	21287.37	0.002	5.97

Subgrupo VC-G1I

Na figura 7.16 está ilustrada a geometria e configuração do carregamento das vigas deste subgrupo, e na tabela 7.6 estão especificados, para cada viga, o carregamento de serviço (p_{CQP}), a porcentagem do vão que está solicitado por momento fletor (M_{CQP}) maior que o momento de fissuração (M_r). Nas linhas de momento fletor máximo (M_{max}) mostram-se a armadura tracionada da seção correspondente e o respectivo valor da taxa de armadura calculada pela área total da seção; no entanto, para o cálculo do coeficiente α (usado para levar em conta o efeito “tension-stiffening”) a taxa de armadura é calculada para área efetiva, em função da altura efetiva da seção (h_{ef}). Nas linhas de momento fletor mínimo (negativo nos apoios intermediários, M_{min}) mostram-se a armadura tracionada da seção correspondente e o respectivo valor da taxa de armadura (área total), além do coeficiente α (calculado em função da taxa de armadura obtida para área efetiva da seção, em que se considera o efeito “tension stiffening”).

O detalhamento completo das armaduras longitudinais de cada viga para este subgrupo e de todas as demais vigas contínuas teóricas estão no Anexo A, item A.2. O carregamento da primeira viga é o menor dentro do grupo, e para a viga quatro é o maior, com valores intermediários para as vigas 2 e 3 do grupo, ou seja, o valor do carregamento é crescente da primeira para a próxima viga dentro do grupo e, conseqüentemente, a taxa de armadura e extensão da viga com concreto fissurado também é crescente da primeira viga para a próxima, conforme dimensionamento no ELU.

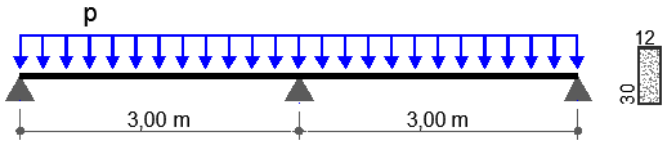


Figura 7.16 – Subgrupo VC-G11: geometria e carregamento

Tabela 7.6 – Subgrupo VC-G11: carregamento e armação

Viga	PCOP (kN/m)	MCOP>Mr (% vão)	Seção	As		ρ (%)*	α
				barras	cm²		
VC-G111	4.70	0.00	M _{max}	2 ϕ 6,3	0.63	0.18	0.03411
			M _{min}	2 ϕ 8,0	1.00	0.28	0.04370
VC-G112	8.50	8.00	M _{max}	2 ϕ 8,0	1.00	0.28	0.04370
			M _{min}	2 ϕ 12,5	2.46	0.68	0.07837
VC-G113	12.30	49.00	M _{max}	2 ϕ 10	1.57	0.44	0.05783
			M _{min}	4 ϕ 10	3.14	0.87	0.09286
VC-G114	16.10	63.67	M _{max}	2 ϕ 12,5	2.46	0.68	0.07837
			M _{min}	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.10386

(*) calculada em relação à área total da seção

Nos próximos gráficos estão os resultados das flechas calculadas pelos diferentes métodos e modelos separados por viga, mostrados pela relação carga aplicada versus flecha, obtida na seção em que ocorreu a flecha máxima usando-se o modelo do Analest. Esta seção coincidiu em geral com a seção de flecha máxima obtida pelos demais métodos/modelos, apenas para poucos casos houve uma pequena diferença (+ ou – 10 cm). No Anexo B, item B.2, estão também mostradas as figuras com as flechas ao longo do comprimento das vigas para a carga total de serviço.

Na primeira viga, VC-G111, a solicitação máxima não atingiu o momento de fissuração, logo o comportamento da seção com flecha máxima até a carga total de serviço ainda se encontra no estágio I.

Analisando-se os três gráficos, 7.18 a 7.20, percebe-se que o método simplificado Branson-NBR, que utiliza a rigidez equivalente da seção mais solicitada para todo um vão, mostrou os maiores valores de flecha para um mesmo nível de carga aplicada. Pelo mesmo motivo os métodos simplificados de Branson-NBR e Bilinear apresentam uma carga correspondente ao ponto de mudança de rigidez na curva carga-flecha inferior à obtida pelos demais modelos, os quais levam em conta a propagação de fissuração do concreto ao longo da viga. Para todas as

vigas o MEV-Bilinear mostrou a curva carga-flecha mais próxima à fornecida pelo modelo do Analest.

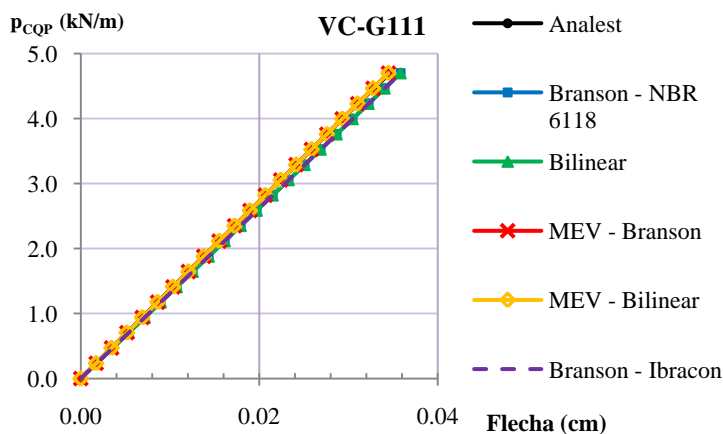


Figura 7.17 – VC-G111: gráfico carga-flecha para seção com flecha máxima

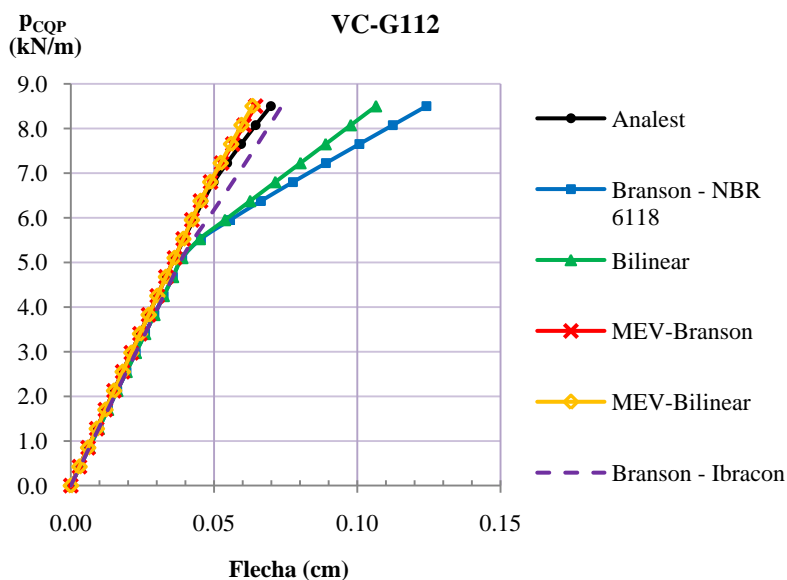


Figura 7.18 – VC-G112: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

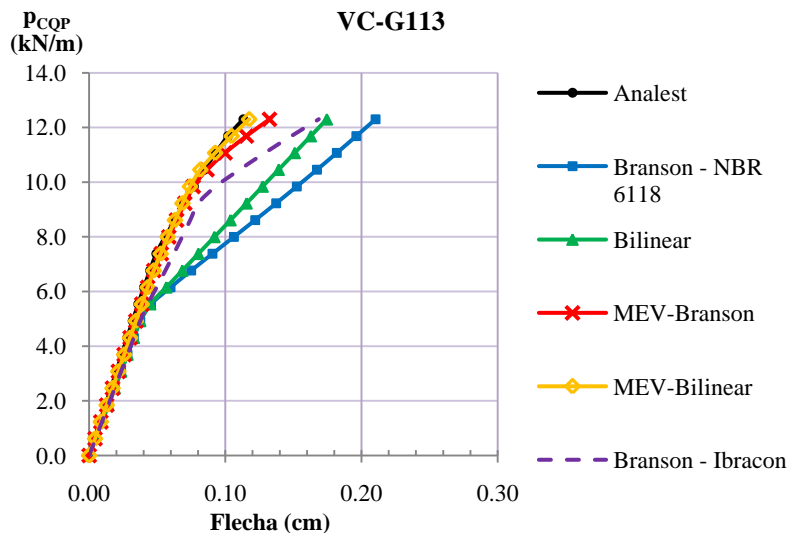


Figura 7. 19 – VC-G113: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

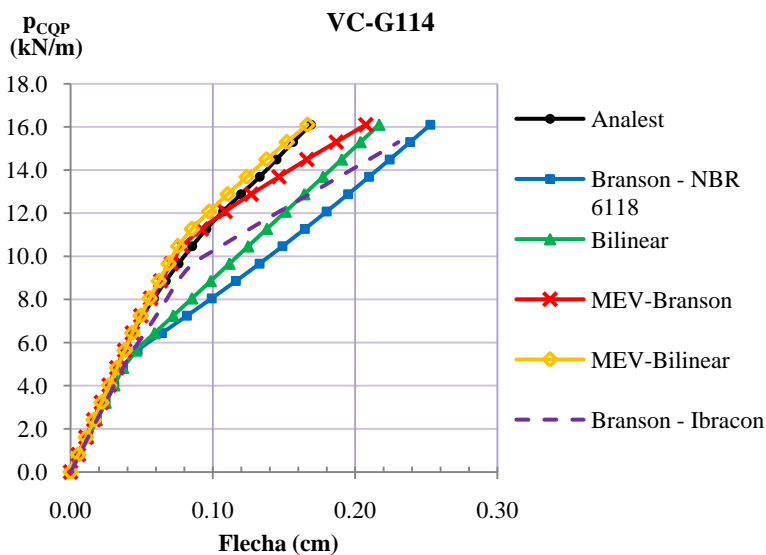


Figura 7.20 – VC-G114: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

A figura 7.21 mostra os valores das flechas finais, calculadas por cada método/modelo para a carga total de serviço da seção de flecha máxima de cada viga. Pode-se visualizar a variação de flecha de viga para viga e de modelo para modelo dentro do subgrupo.

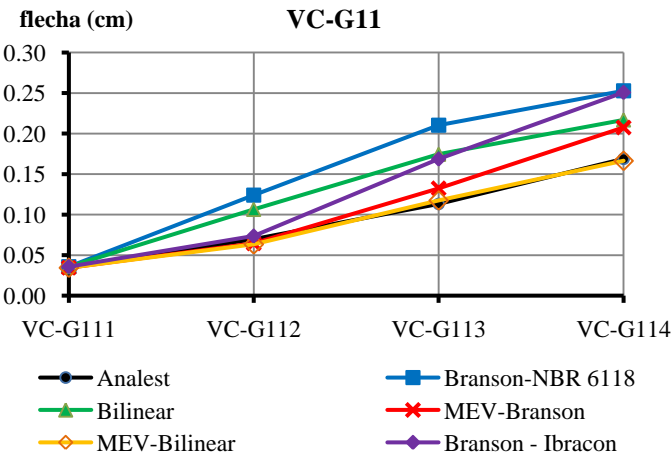


Figura 7.21 – Subgrupo VC-G11: resultados das flechas finais

Adotando como referência os resultados obtidos pelo modelo do Analest para avaliar a variação dos valores obtidos entre os métodos e modelos, foram calculadas as diferenças percentuais das flechas finais em relação ao modelo do Analest, mostradas na tabela 7.7. A média na última linha é calculada com os valores das diferenças percentuais em módulo.

Tabela 7.7 – Subgrupo VC-G11: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G111	3.47	3.47	3.47	-0.46	-0.46
VC-G112	77.79	5.46	52.58	-7.55	-9.13
VC-G113	85.70	48.93	54.16	16.95	3.75
VC-G114	49.72	48.56	28.45	22.86	-1.46
Média	54.17	26.60	34.67	11.96	3.70

Conforme já observado a partir dos gráficos anteriores, o MEV-Bilinear foi o método que mais se aproximou do modelo Analest, enquanto que o Branson-NBR apresentou a maior média de diferença percentual (54,17%) de flecha final.

Subgrupo VC-G12

O subgrupo VC-G12 diferencia-se do anterior por estar submetido a cargas concentradas, conforme ilustra a figura 7.22.

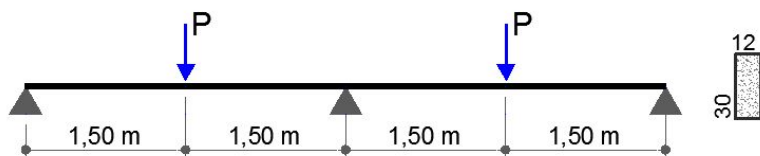


Figura 7.22 – Subgrupo VC-G12: geometria e tipo de carregamento

Os dados de carregamento e armação estão na próxima tabela, onde a carga distribuída (p_{CQP}) corresponde ao peso próprio da viga, a qual é aplicada junto com o primeiro incremento de carga concentrada. As descrições das variáveis dessa tabela seguem as dadas anteriormente no item 7.2.1 para a tabela 7.6.

Tabela 7.8 – Subgrupo VC-G12: carregamento e armação

Viga	P_{CQP} (kN)	p_{CQP} (kN/m)	$M_{CQP} > M_r$ (% vão)	Seção	A_s		ρ (%)*	α
					barras	cm ²		
VC-G121	6.60	0.90	0.00	M_{max}	2 ϕ 6,3	0.63	0.18	0.03411
				M_{min}	2 ϕ 8,0	1.01	0.28	0.04395
VC-G122	14.85	0.90	25.67	M_{max}	2 ϕ 10,0	1.57	0.44	0.05783
				M_{min}	2 ϕ 10,0	1.57	0.44	0.05783
VC-G123	23.10	0.90	84.67	M_{max}	3 ϕ 10,0	2.36	0.66	0.07615
				M_{min}	4 ϕ 10,0	3.14	0.87	0.09286
VC-G124	31.35	0.90	63.67	M_{max}	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.10386
				M_{min}	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.10386

(*) calculada em relação à área total da seção

A seguir estão dispostos os resultados para cada viga. A primeira não foi solicitada por momento fletor maior que o momento de

fissuração, por isso o comportamento da seção com flecha máxima, representada na figura 7.23, ainda está no estágio I até a carga total. A descontinuidade no primeiro trecho do gráfico, assim como mencionado em 6.3.2, se deve ao fato de, para as vigas submetidas à carga concentrada, no primeiro incremento de carga P_{CQP} se adicionar também a carga distribuída referente ao peso próprio p_{CQP} .

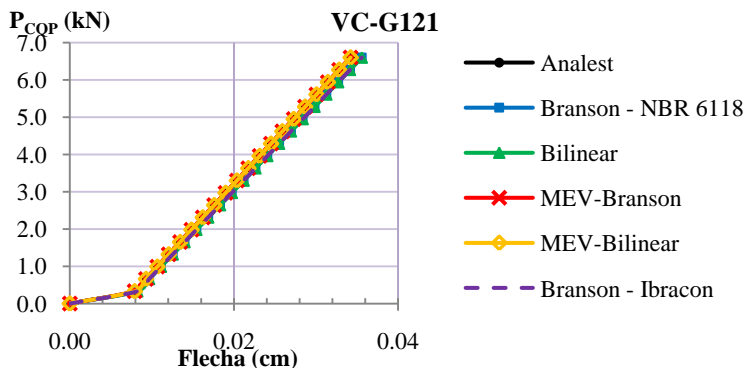


Figura 7.23 – VC-G121: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

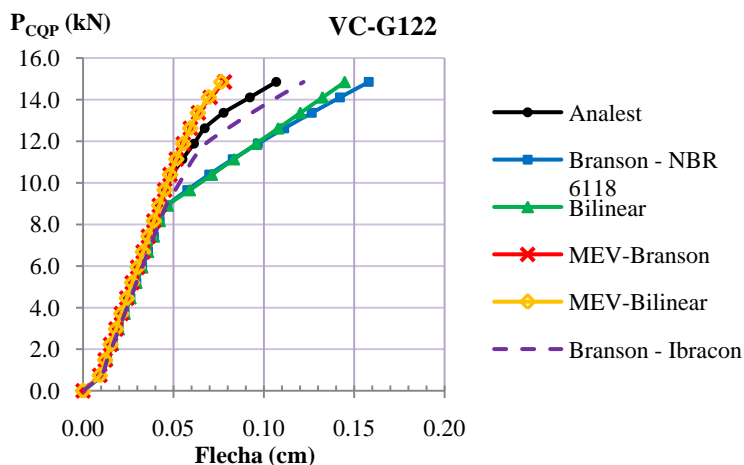


Figura 7.24 – VC-G122: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

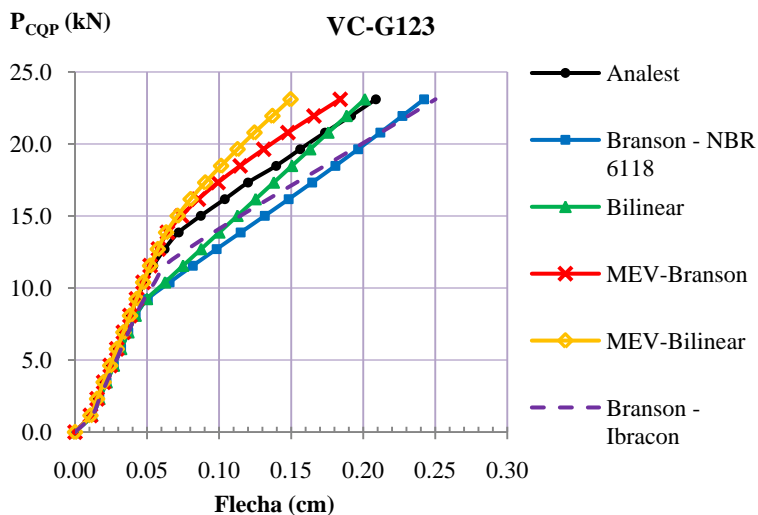


Figura 7.25 – VC-G123: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

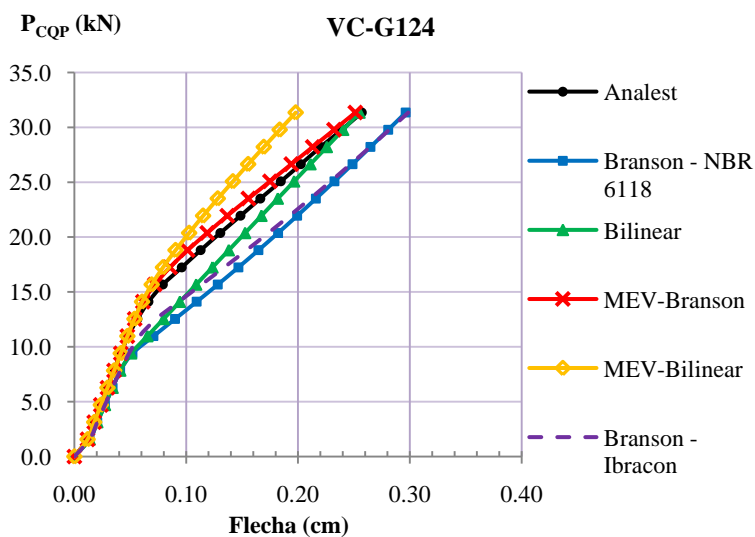


Figura 7.26 – VC-G124: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

Novamente, as flechas calculadas pelo método simplificado Branson-NBR apresentaram os maiores valores de flecha para um mesmo nível de carga aplicada, seguido pelo Branson-Ibracon. Já o MEV-Bilinear mostrou-se um pouco mais rígido, com menores valores de flecha para um mesmo nível de carga. Nota-se também nos gráficos carga-flecha que os métodos simplificados de Branson-NBR e Bilinear, que utilizam a rigidez equivalente da seção mais solicitada para todo um vão, apresentam uma carga correspondente ao ponto de mudança de rigidez (estádio I para estágio II) na seção analisada inferior à obtida pelos demais modelos. Pode-se observar dos gráficos das vigas VC-G123 e VC-G124 que a rigidez no trecho pós-fissuração dos métodos baseados na equação de Branson (da NBR, MEV e Ibracon) é semelhante à rigidez fornecida pelo modelo do Analest, enquanto que para os métodos baseados na equação bilinear do CEB a rigidez é maior. De uma maneira geral, a curva carga-flecha obtida pelo MEV-Branson foi a que mais se aproximou da obtida pelo modelo do Analest.

A figura a seguir mostra os valores de flecha final (obtida para a carga total de serviço), calculada para cada viga pelos diversos métodos/modelos e a tabela 7.9 mostra as diferenças percentuais em relação aos valores obtidos pelo modelo do Analest.

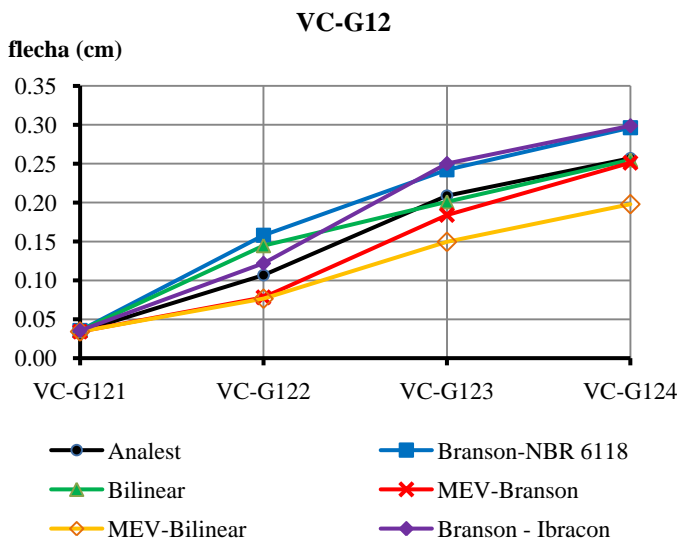


Figura 7.27 – Subgrupo VC-G12: resultados das flechas finais

Tabela 7.9 – Subgrupo VC-G12: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G121	3.81	3.81	3.81	-0.17	-0.17
VC-G122	47.98	14.18	35.52	-26.72	-28.37
VC-G123	15.99	19.80	-3.68	-11.86	-28.38
VC-G124	15.30	16.22	-0.79	-2.24	-22.97
Média	20.77	13.50	10.95	10.25	19.97

O MEV-Branson e o método Bilinear apresentaram em média a menor diferença dos resultados de flecha final em relação ao modelo do Analest.

7.2.2 Grupo VC-G2

Este grupo é formado por quatro vigas submetidas a uma carga uniformemente distribuída, constituídas de concreto com resistência à compressão, f_{ck} , de 25 MPa, cujas propriedades estão mostradas na tabela abaixo, além do momento de início de fissuração da seção, M_r .

Tabela 7.10 – Grupo VC-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	11.78

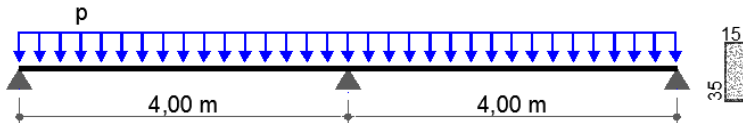


Figura 7.28 – Grupo VC-G2: geometria e tipo de carregamento

Os dados de cada viga estão expostos na tabela 7.11 (ver explicações no item 7.2.1) onde se percebe o aumento da taxa de armadura e da extensão do vão fissurado da primeira viga até a última.

Tabela 7.11 – Grupo VC-G2: carregamento e armação

Viga	PCOP (kN/m)	M _{COP>Mr} (% vão)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VC-G211	5.11	0.00	M _{max}	2 ϕ 8,0	1.00	0.19	0.03367
			M _{min}	2 ϕ 10,0	1.57	0.30	0.04275
VC-G212	8.91	7.25	M _{max}	2 ϕ 10,0	1.57	0.30	0.04275
			M _{min}	4 ϕ 10,0	3.14	0.60	0.06626
VC-G213	12.71	43.00	M _{max}	3 ϕ 10,0	2.36	0.45	0.05485
			M _{min}	2 ϕ 16,0	4.02	0.77	0.07849
VC-G214	16.51	59.75	M _{max}	4 ϕ 10,0	3.14	0.60	0.06626
			M _{min}	3 ϕ 16,0	6.03	1.15	0.10402

(*) calculada em relação à área total da seção

Os resultados das flechas obtidas para cada viga estão expostos nos próximos gráficos pela relação carga aplicada versus flecha máxima. Na primeira viga o momento máximo solicitante não foi maior que o momento de fissuração, por isso, a seção analisada apresentou comportamento no estágio I até a carga total de serviço.

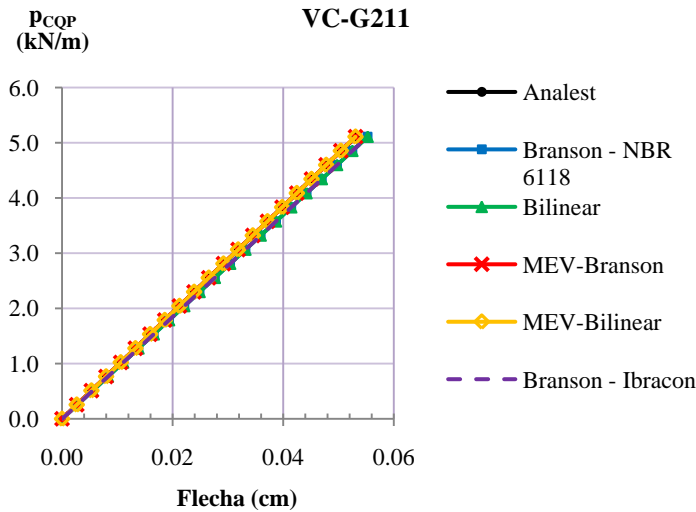


Figura 7.29 – VC-G211: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

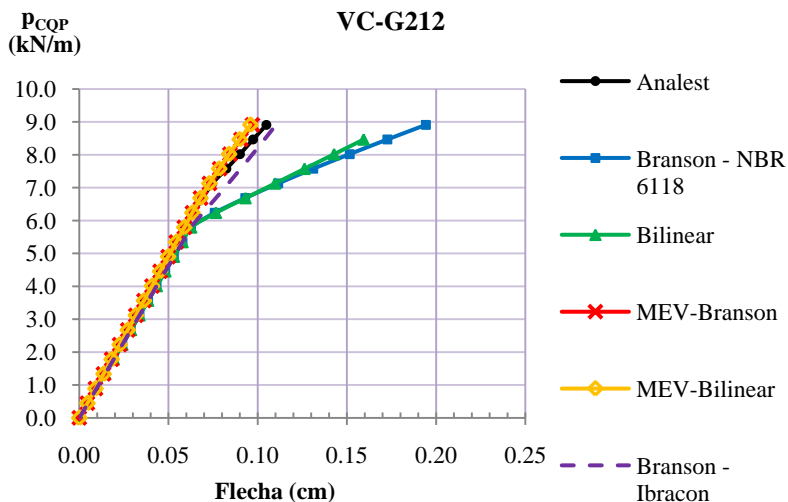


Figura 7.30 – VC-G212: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

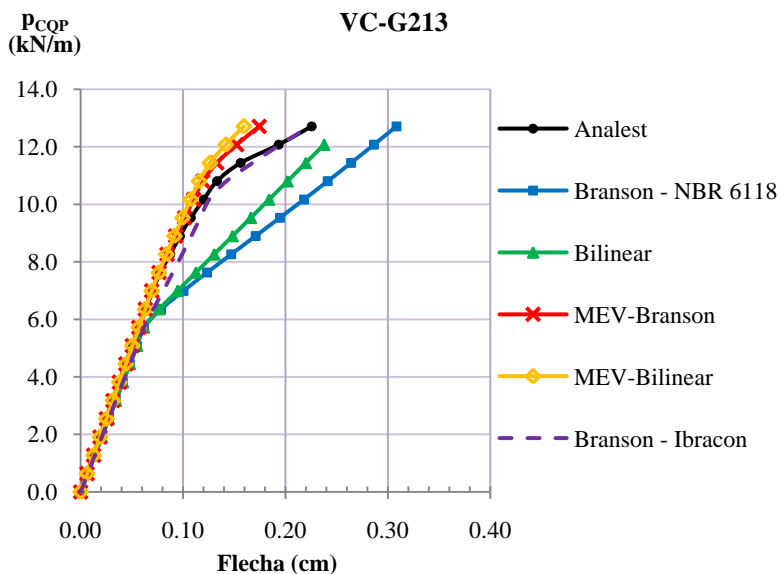


Figura 7.31 – VC-G213: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

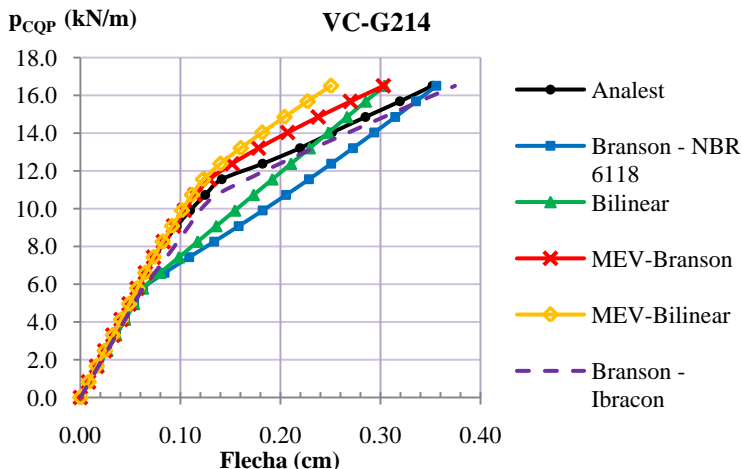


Figura 7.32 – VC-G214: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

Como pode ser visto nos gráficos anteriores e melhor visualizado ainda no próximo gráfico, de flechas finais (para carga total de serviço), para as vigas 2 e 3 do grupo os maiores valores de flechas, para mesmo nível de carga aplicada, foram obtidas pelo método Branson-NBR, enquanto os menores valores foram em geral obtidos pelo MEV-Bilinear. Novamente os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentaram início da fissuração das seções analisadas (vigas 2, 3 e 4) abaixo dos outros modelos.

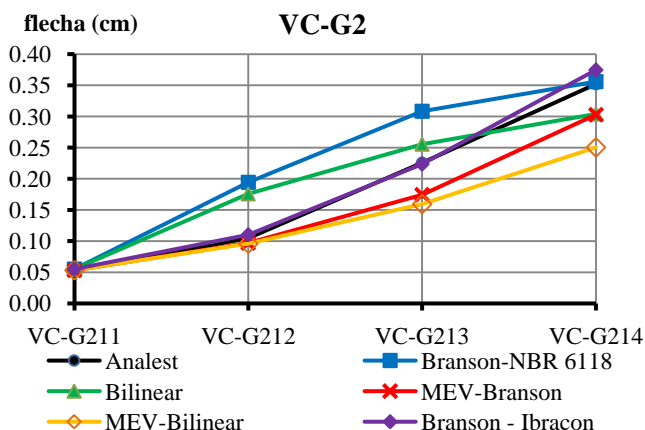


Figura 7.33 – Grupo VC-G2: resultados das flechas finais

O método Branson-Ibracon apresentou resultados mais próximos aos do modelo do Analest para todas as vigas, com 4,07% de média de variação percentual, seguido pelo MEV-Branson, com média de variação percentual de 11,09% (média calculada com os valores em módulo).

Tabela 7.12 – Grupo VC-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G211	3.82	3.82	3.82	-0.29	-0.29
VC-G212	85.26	5.14	67.72	-7.44	-8.48
VC-G213	36.71	-0.89	13.28	-22.70	-29.36
VC-G214	1.12	6.42	-13.63	-13.93	-28.83
Média	31.73	4.07	24.61	11.09	16.74

7.2.3 Grupo VC-G3

Este terceiro grupo de vigas estudado é dividido em dois subgrupos com quatro vigas cada. A tabela abaixo apresenta os valores das propriedades do concreto e do momento de início de fissuração da seção.

Tabela 7.13 – Grupo VC-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	12.31

Subgrupo VC-G31

A geometria e o tipo de carregamento deste primeiro subgrupo estão ilustrados na próxima figura.

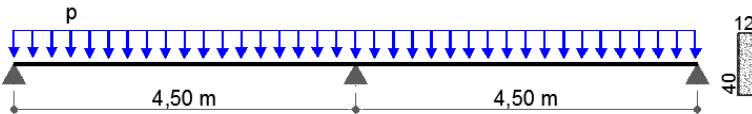


Figura 7.34 – Subgrupo VC-G31: geometria e tipo de carregamento

Os dados de cada viga estão mostrados na tabela 7.14 (ver explicações no item 7.2.1) e os resultados de cada viga em termos de gráficos carga aplicada versus flecha, para seção com flecha máxima, estão nas próximas figuras.

Tabela 7.14 – Subgrupo VC-G31: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN/m)	M _{COP>M_r} (% vão)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VC-G311	5.85	3.56	M _{max}	2 ϕ 8,0	1.01	0.21	0.03536
			M _{min}	2 ϕ 12,5	2.46	0.51	0.05975
VC-G312	10.50	43.11	M _{max}	2 ϕ 12,5	2.46	0.51	0.05975
			M _{min}	3 ϕ 12,5	3.69	0.77	0.07870
VC-G313	15.15	64.44	M _{max}	4 ϕ 10,0	3.14	0.65	0.07042
			M _{min}	3 ϕ 16,0	6.03	1.26	0.11062
VC-G314	19.80	74.00	M _{max}	2 ϕ 16,0	4.02	0.84	0.08353
			M _{min}	4 ϕ 16,0	8.04	1.68	0.13401

(*) calculada em relação à área total da seção

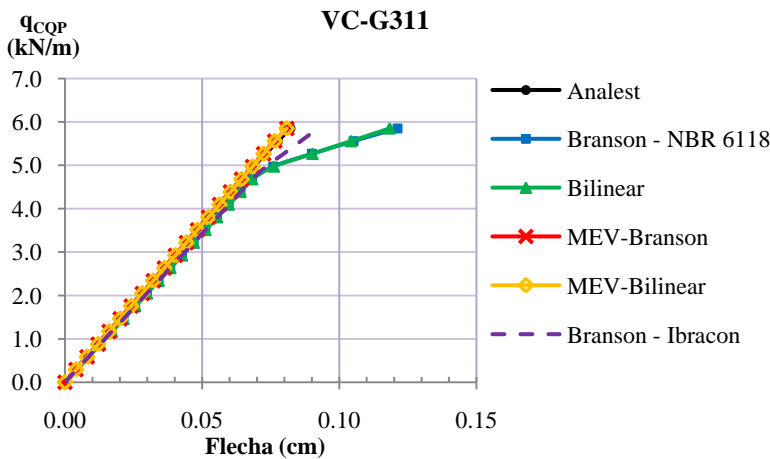


Figura 7.35 – VC-G311: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

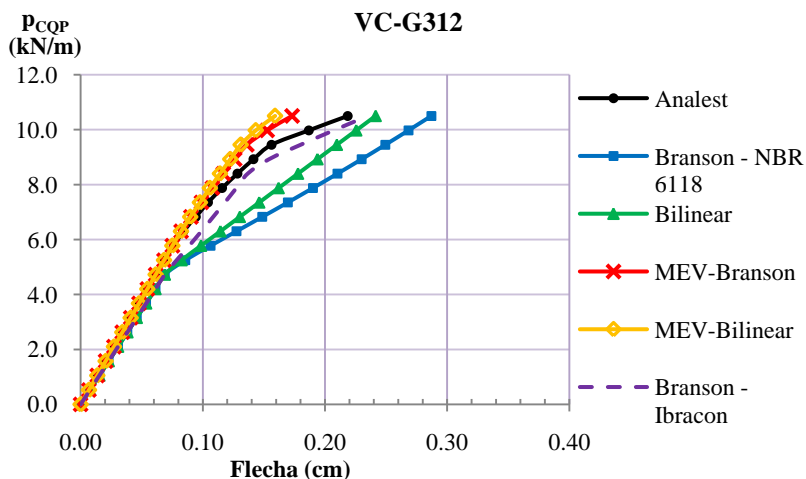


Figura 7.36 – VC-G312: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

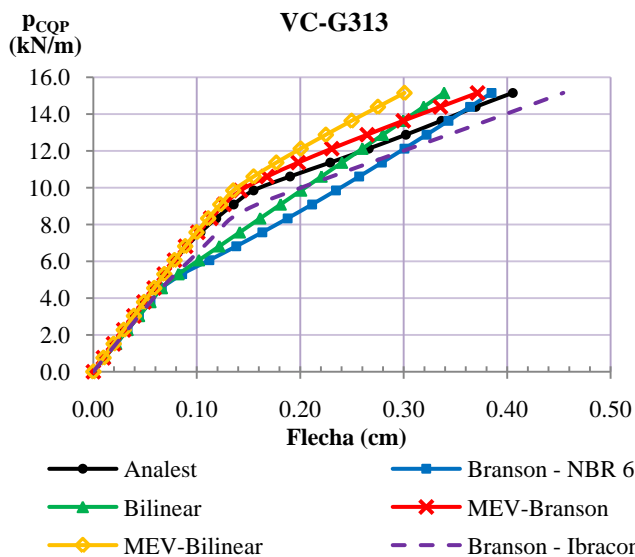


Figura 7.37 – VC-G313: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

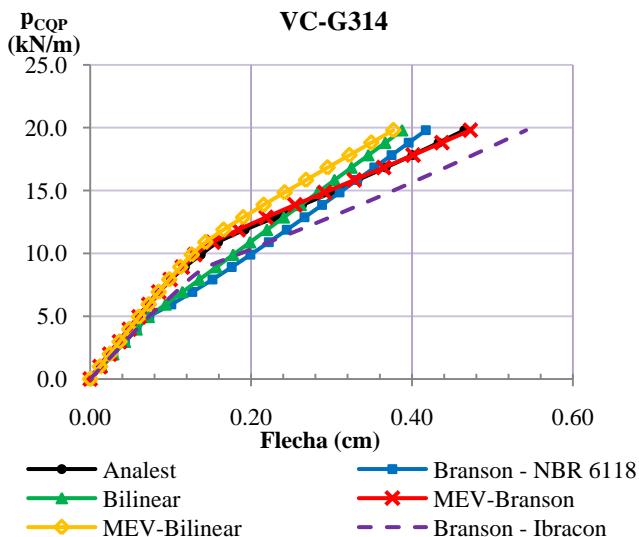


Figura 7.38 – VC-G314: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

Analisando os gráficos anteriores, constata-se que os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentam carga correspondente à mudança de rigidez na curva carga-flecha (estádio I para estágio II) na seção analisada inferior à obtida pelos demais modelos, mas com rigidez no trecho após início da fissuração maior do que as apresentadas pelos demais modelos, com exceção da viga 1, onde os outros modelos ainda estão entrando no estágio II de comportamento para a carga final, devido a apenas uma pequena extensão do vão estar solicitado por momento maior que o momento de fissuração para a carga total de serviço (ver tabela 7.14).

Para as duas primeiras vigas percebe-se que as maiores flechas finais foram obtidas pelo método Branson-NBR, mas aumentando o carregamento, e consequentemente a armadura e extensão de vão fissurado, o método Branson-Ibracon passa a fornecer os maiores valores de flecha final, como pode ser visto na figura 7.39.

A menor variação dos resultados de flecha final em relação ao modelo do Analtest foi obtida pelo MEV-Branson (8,11%), seguido pelo Branson-Ibracon (12,04%), e a maior variação foi obtida para o método Branson-NBR (23,53%). As flechas finais calculadas pelo MEV-Bilinear apresentaram os menores valores, com média de diferença percentual em relação ao Analtest de 18,4%, como mostra a tabela 7.15.

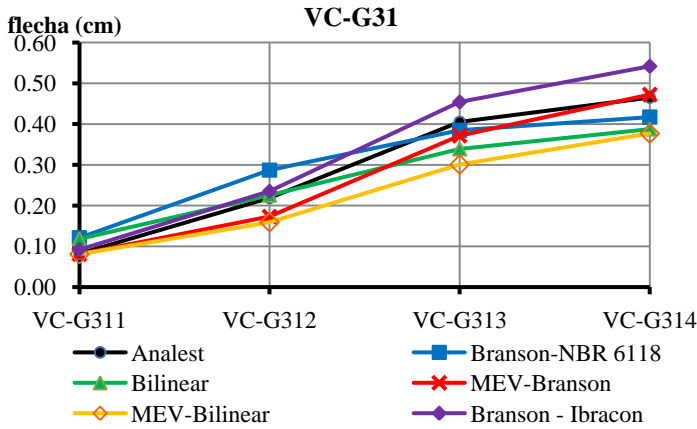


Figura 7.39 – Subgrupo VC-G31: resultados das flechas

Tabela 7.15 – Subgrupo VC-G31: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G311	47.49	12.09	44.00	-1.58	-1.63
VC-G312	31.27	7.54	3.16	-20.85	-27.21
VC-G313	-5.06	12.03	-16.37	-8.41	-25.82
VC-G314	-10.29	16.50	-16.62	1.60	-18.97
Média	23.53	12.04	20.04	8.11	18.41

Subgrupo VC-G32

As quatro vigas deste subgrupo estão solicitadas a cargas concentradas no meio dos vãos e tem seus dados expostos na tabela 7.16.

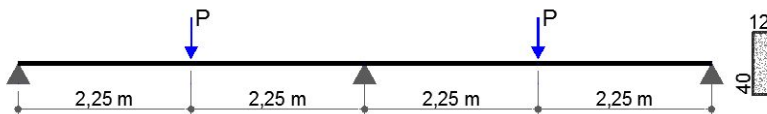


Figura 7.40 – Subgrupo VC-G32: geometria e tipo de carregamento

Tabela 7.16 – Subgrupo VC-G32: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN)	P _{COP} (kN/m)	M _{COP>Mr} (% vão)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
					barras	cm ²		
VC-G321	11.65	1.20	1.11	M _{max}	2 ϕ 10,0	1.57	0.33	0.04505
				M _{min}	2 ϕ 10,0	1.57	0.33	0.04505
VC-G322	27.38	1.20	46.22	M _{max}	4 ϕ 10,0	3.14	0.65	0.07042
				M _{min}	3 ϕ 12,5	3.69	0.77	0.07870
VC-G323	42.52	1.20	66.44	M _{max}	4 ϕ 12,5	4.92	1.03	0.09613
				M _{min}	3 ϕ 16,0	6.03	1.26	0.11062
VC-G324	55.34	1.20	72.44	M _{max}	3 ϕ 16,0	6.03	1.26	0.11062
				M _{min}	4 ϕ 16,0	8.04	1.68	0.13401

(*) calculada em relação à área total da seção

Os resultados de cada viga, em termos de gráficos carga aplicada versus flecha máxima, estão apresentados nas figuras a seguir.

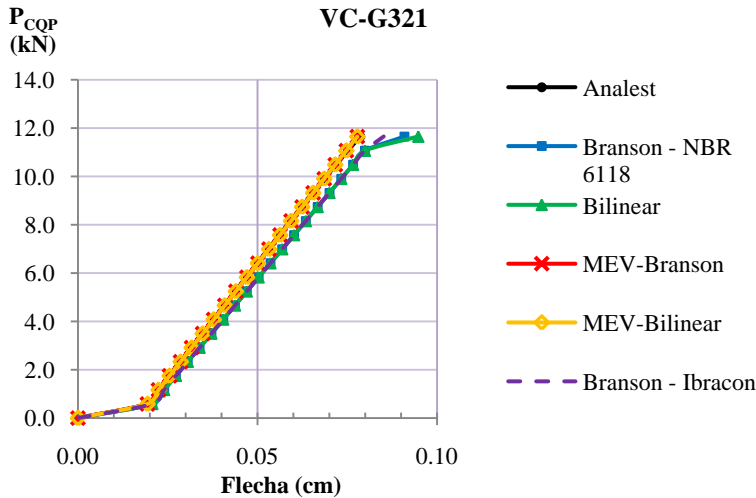


Figura 7.41 – VC-G321: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

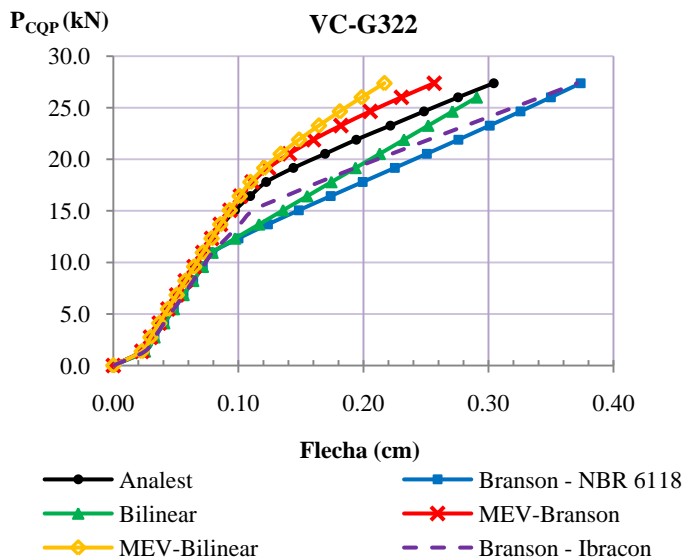


Figura 7.42 – VC-G322: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

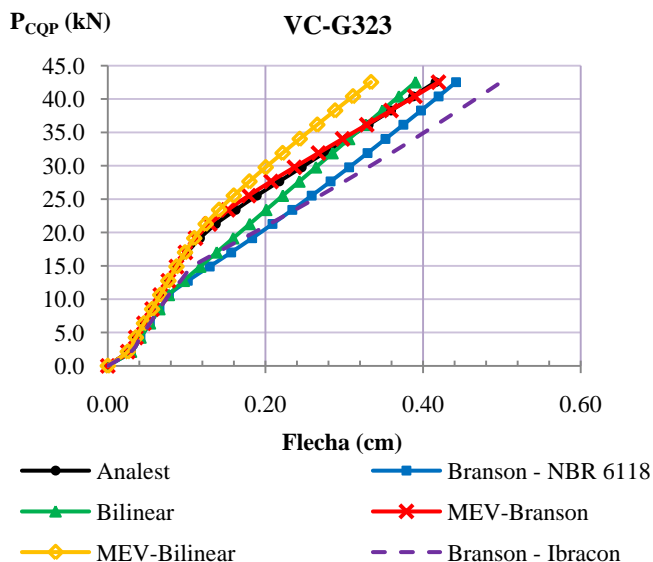


Figura 7.43 – VC-G323: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

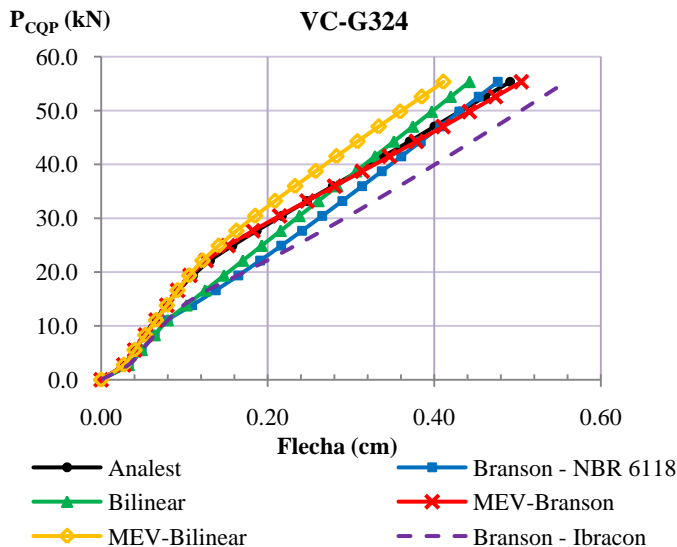


Figura 7.44 – VC-G324: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

Para as vigas VC-G323 e 4 a curva carga-flecha do método MEV-Branson praticamente coincide com a do modelo do Analest. Os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear novamente apresentaram carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II na seção analisada menor que os demais modelos, que tiveram valores de carga praticamente coincidentes, com exceção do Branson-Ibracon, que teve comportamento da curva similar aos demais métodos simplificados, mas com rigidez após fissuração menor que os dois outros métodos simplificados que apresentaram as maiores rigidezes dentre os modelos e métodos analisados.

Na figura 7.45 estão os valores de flecha calculados para a carga total de serviço, onde se pode visualizar a variação das flechas obtidas de viga para viga e de método para método. O modelo MEV-Branson se aproximou mais dos valores obtidos pelo modelo do Analest, com exceção da viga VC-G322, onde o método Bilinear obteve resultado praticamente coincidente com o modelo do Analest.

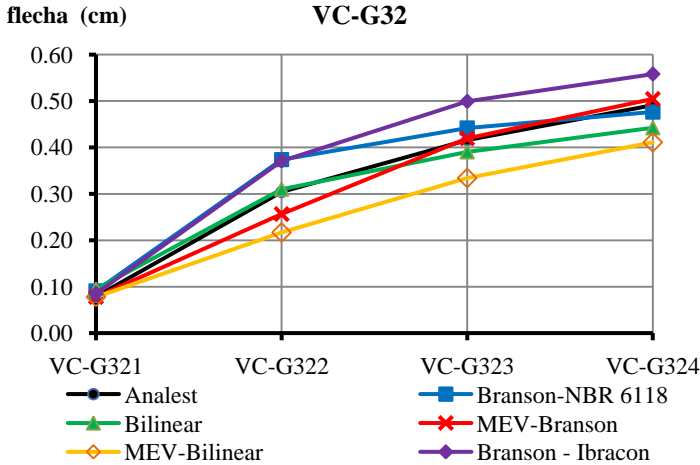


Figura 7.45 – Subgrupo VC-G32: resultados das flechas finais

Novamente o MEV-Bilinear forneceu menores valores de flechas finais, enquanto que os maiores valores foram os calculados pelo método Branson-Ibracon. A tabela 7.17 mostra as diferenças percentuais dos valores de flecha final obtidos por cada método/modelo em relação ao modelo do Analest.

Tabela 7.17 – Subgrupo VC-G32: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G321	15.65	8.30	20.55	-1.04	-1.04
VC-G322	22.86	21.90	1.93	-15.66	-28.74
VC-G323	6.27	20.04	-6.09	0.90	-19.67
VC-G324	-2.98	13.65	-9.92	2.74	-16.30
Média	11.94	15.97	9.62	5.08	16.44

As flechas finais calculadas pelo MEV-Branson apresentaram a menor média de diferença percentual (5%) em relação aos resultados do modelo do Analest, enquanto que o MEV-Bilinear apresentou a maior média de diferença (16,4%). O método simplificado Bilinear também

apresentou resultados próximos aos do modelo do Analest, com exceção da primeira viga.

7.2.4 Grupo VC-G4

O grupo VC-G4 é formado por quatro vigas submetidas a uma carga uniformemente distribuída, cuja geometria está ilustrada na figura 7.46. As propriedades do concreto e o momento de início de fissuração da seção das vigas estão apresentados na tabela 7.18 e os demais dados das vigas na tabela 7.19 (ver explicações no item 7.2.1).

Tabela 7.18 – Grupo VC-G4: propriedades do concreto e momento fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25.00	31.60	2.56	23800	0.002	20.52

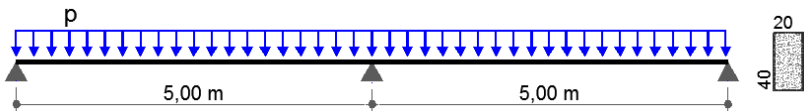


Figura 7.46 – Grupo VC-G4: geometria e tipo de carregamento

Tabela 7.19 – Grupo VC-G4: carregamento e armação

Viga	PCOP (kN/m)	M _{COP>Mr} (% vão)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VC-G411	9.48	6.60	M _{max}	3 ϕ 10,0	2.36	0.30	0.04242
			M _{min}	4 ϕ10,0	3.14	0.39	0.05033
VC-G412	13.48	38.40	M _{max}	4 ϕ10,0	3.14	0.39	0.05033
			M _{min}	4 ϕ 12,5	4.92	0.62	0.06752
VC-G413	17.48	57.20	M _{max}	3 ϕ 12,5	3.69	0.46	0.05577
			M _{min}	4 ϕ 16,0	8.04	1.01	0.09483
VC-G414	21.48	66.60	M _{max}	4 ϕ 12,5	4.92	0.62	0.06752
			M _{min}	5 ϕ 16,0	10.06	1.26	0.11069

(*) calculada em relação à área total da seção

Nas próximas quatro figuras estão os resultados para cada viga expostos pela relação carga aplicada versus flecha máxima.

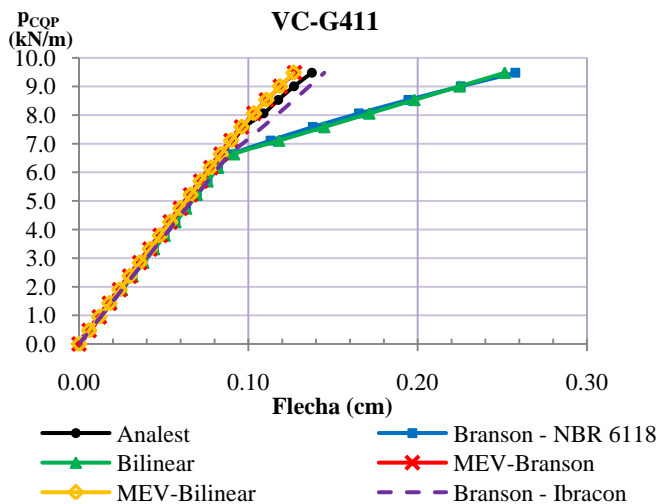


Figura 7.47 – VC-G411: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

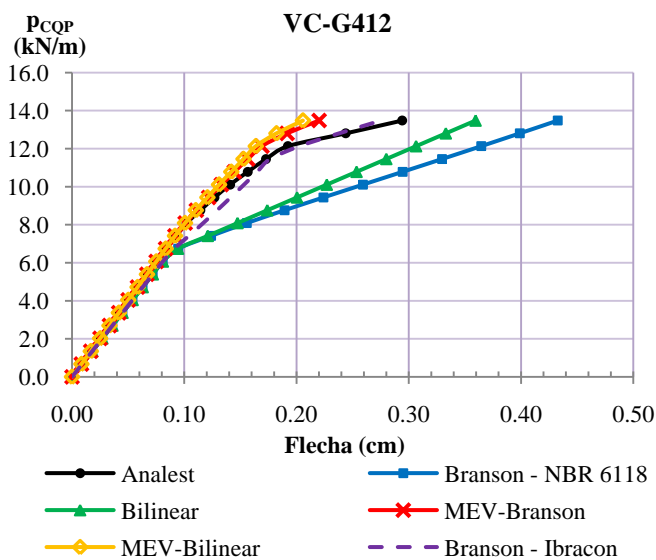


Figura 7.48 – VC-G412: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

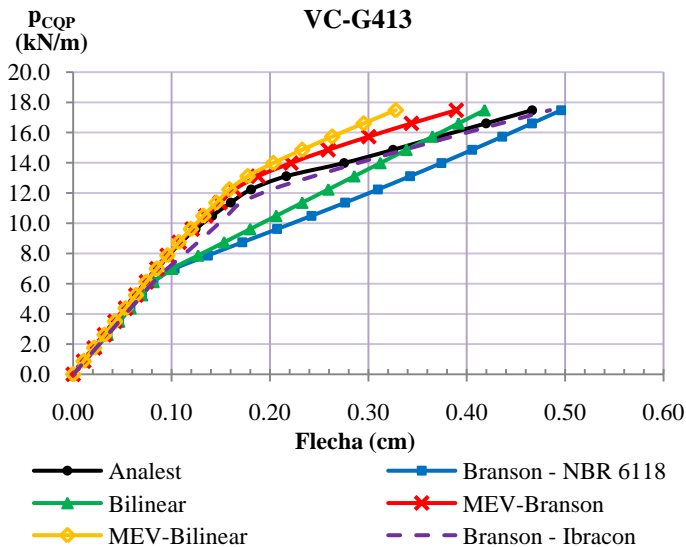


Figura 7.49 – VC-G413: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

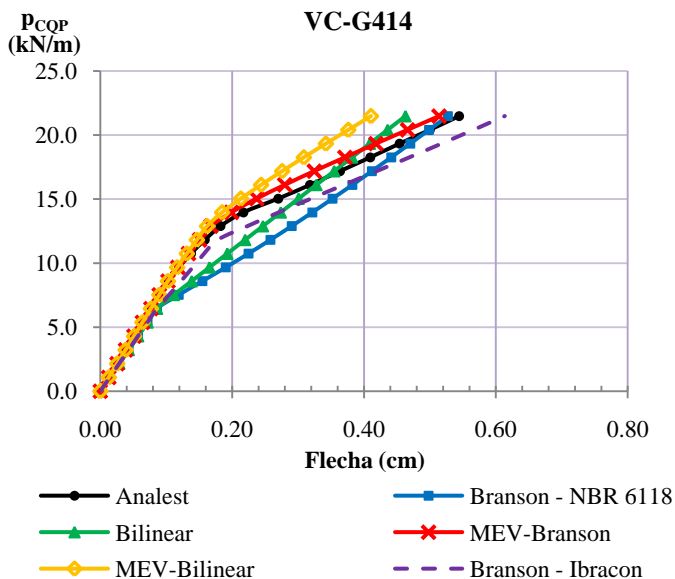


Figura 7.50 – VC-G414: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

O gráfico seguinte mostra as flechas finais (para carga total de serviço) obtidas por cada método/modelo para cada viga.

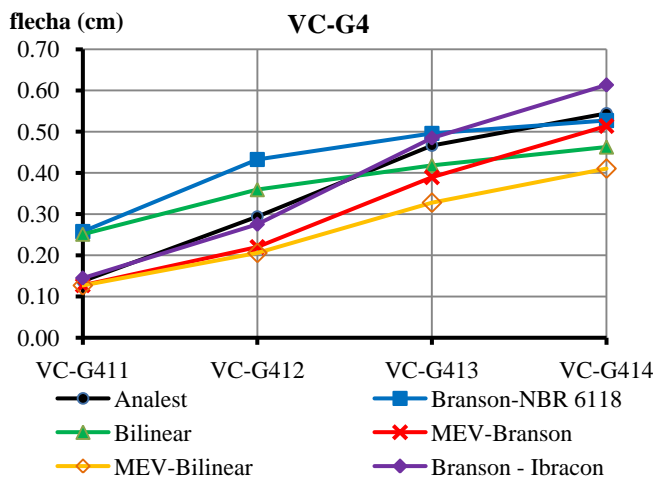


Figura 7.51 – Grupo VC-G4: resultados das flechas

Analisando os gráficos anteriores, percebe-se novamente que o MEV-Bilinear forneceu os menores valores de flecha para um mesmo nível de carga, enquanto que o método Branson-NBR mostrou os maiores valores até a viga VC-G413. Exceto para a primeira viga, os métodos baseados na equação bilinear fornecem uma rigidez no trecho pós-fissuração do concreto superior aos demais métodos e modelos. As diferenças percentuais dos valores de flecha final obtida por cada método/modelo em relação ao modelo do Analest, para cada viga, estão apresentadas na tabela 7.20.

Tabela 7.20 – Grupo VC-G41: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G411	87.40	5.37	82.86	-7.45	-7.80
VC-G412	47.13	-6.37	22.24	-25.15	-30.05
VC-G413	6.34	3.91	-10.36	-16.51	-29.72
VC-G414	-3.16	12.71	-14.97	-5.61	-24.57
Média	36.01	7.09	32.61	13.68	23.03

O método simplificado Branson-Ibracon foi o que mais se aproximou dos resultados calculados pelo modelo do Analest, com diferença média de 7,09%, seguido pelo MEV-Branson com diferença média de 13,7%. O método simplificado Branson-NBR apresentou diferença muito grande nas duas primeiras vigas (87% e 47%), mas pequena diferença para as vigas 3 e 4 do grupo, similarmente ao método Bilinear.

7.2.5 Grupo VC-G5

Este grupo é dividido em dois subgrupos formados por quatro vigas cada, cujos propriedades do concreto e momento de início de fissuração da seção estão apresentados na tabela 7.21.

Tabela 7.21 – Grupo VC-G5: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	32.06

Subgrupo VC-G51

Conforme sequência estabelecida, a seguir está primeiramente a figura com a geometria e tipo do carregamento das vigas do subgrupo, em seguida a tabela com os dados de cada viga e, logo após, os resultados em termos de gráficos carga aplicada versus flecha máxima para cada viga.

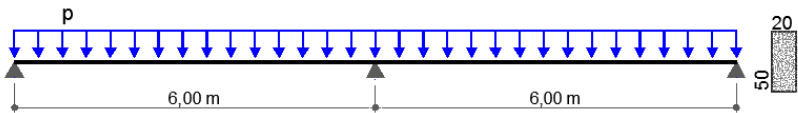


Figura 7.52 – Subgrupo VC-G51: geometria e tipo de carregamento

Tabela 7.22 – Subgrupo VC-G51: carregamento e armação

Viga	PCOP (kN/m)	MCOP>M _r (% vão)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VC-G511	10.93	7.50	M _{max}	3 ϕ 10,0	2.35	0.24	0.03743
			M _{min}	4 ϕ 12,5	4.92	0.49	0.05817
VC-G512	16.55	48.83	M _{max}	3 ϕ 12,5	3.69	0.37	0.04845
			M _{min}	4 ϕ 16,0	8.04	0.80	0.08119
VC-G513	22.17	64.50	M _{max}	3 ϕ 16,0	6.03	0.60	0.06662
			M _{min}	5 ϕ 16,0	10.05	1.01	0.09483
VC-G514	27.79	72.50	M _{max}	4 ϕ 16,0	8.04	0.80	0.08119
			M _{min}	7 ϕ 16,0	14.07	1.41	0.11945

(*) calculada em relação à área total da seção

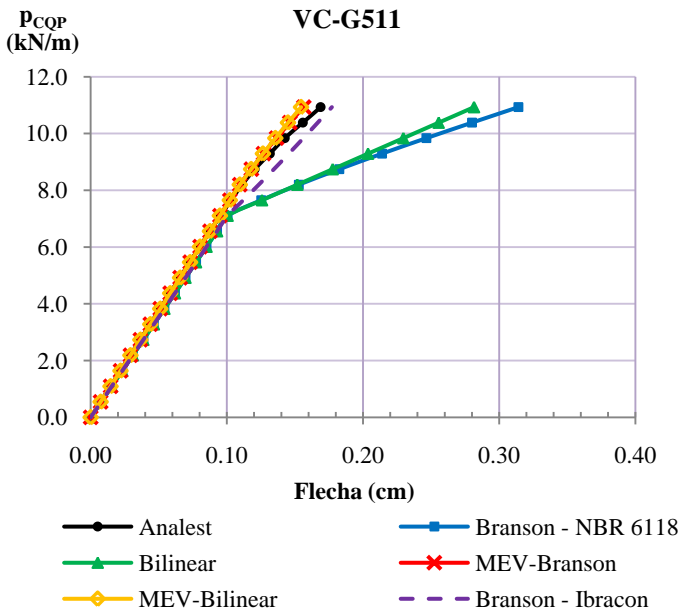


Figura 7.53 – VC-G511: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

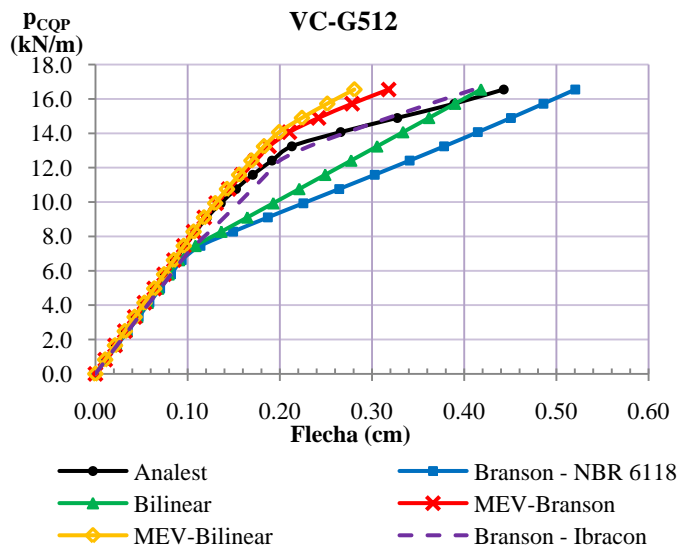


Figura 7.54 – VC-G512: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

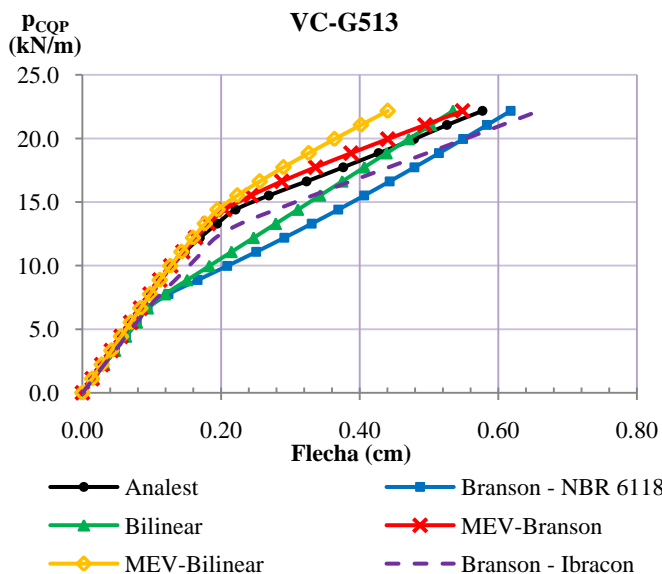


Figura 7.55 – VC-G513: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

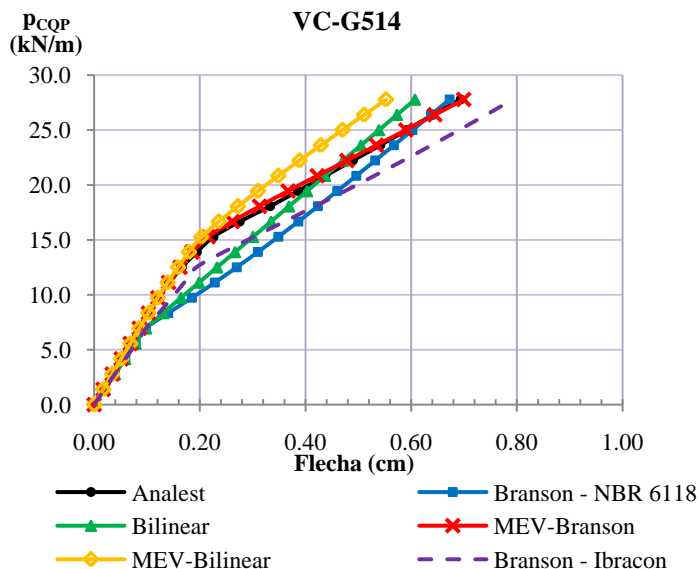


Figura 7.56 – VC-G514: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

Novamente, exceto para a primeira viga, os métodos baseados na equação bilinear mostraram uma rigidez no trecho pós-fissuração superior aos demais modelos e métodos. Por este motivo e pela carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II na seção analisada estar acima ou coincidente com a dos demais modelos; o MEV-Bilinear apresentou os menores valores de flecha para um mesmo valor de carga dentre os métodos e modelos estudados. Os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentaram carga correspondente à mudança para o estágio II menor que os demais modelos, comportamento que vem se repetindo nos grupos de vigas analisados.

O gráfico seguinte mostra as flechas finais (para carga total de serviço) obtidas por cada método/modelo para cada viga. Comparando as flechas obtidas pelos diferentes métodos nota-se que o MEV-Bilinear obteve os menores valores de flecha final, enquanto que o método Branson-NBR obteve os maiores valores para as duas primeiras vigas.

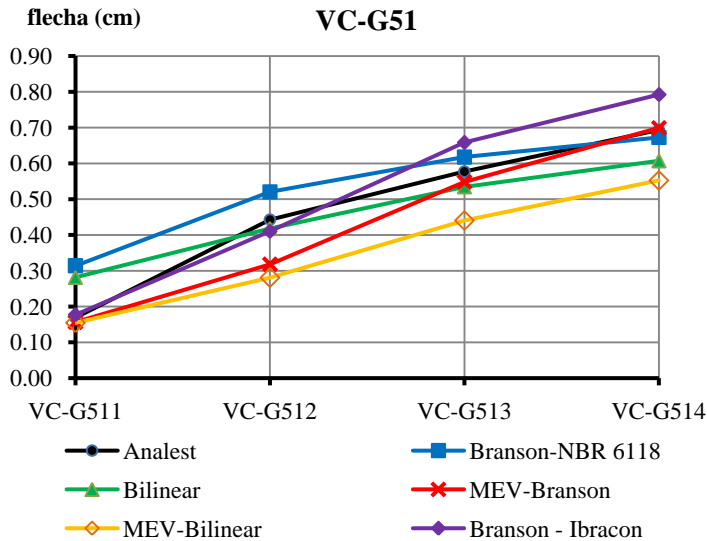


Figura 7.57 – Subgrupo VC-G51: resultados das flechas finais

Em média, o método simplificado Branson-Ibracon e o MEV-Branson obtiveram a menor diferença em relação aos resultados do Analest, 10,15% e 10,33% respectivamente, enquanto que o método Branson-NBR apresentou a maior diferença percentual média (28,39%).

Tabela 7.23 – Subgrupo VC-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G511	85.97	4.91	66.68	-7.35	-8.51
VC-G512	17.54	-7.35	-5.57	-28.17	-36.58
VC-G513	7.03	14.10	-7.39	-4.99	-23.70
VC-G514	-3.03	14.27	-12.46	0.82	-20.33
Média	28.39	10.15	23.03	10.33	22.28

Subgrupo VC-G52

Na figura 7.58 e na tabela 7.24 (ver explicações no item 7.2.1) estão os dados das vigas deste subgrupo.

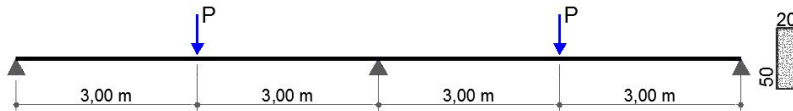


Figura 7.58 – Subgrupo VC-G52: geometria e tipo de carregamento

Tabela 7.24 – Subgrupo VC-G52: carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN)	p_{COP} (kN/m)	$M_{COP} > M_r$ (% vão)	Seção	A_s		ρ (%)*	α
					barras	cm ²		
VC-G521	18.17	2.50	0.00	M_{max}	3 ϕ 10,0	2.46	0.25	0.03835
				M_{min}	4 ϕ 10,0	3.14	0.31	0.04398
VC-G522	45.43	2.50	40.17	M_{max}	4 ϕ 12,5	4.92	0.49	0.05817
				M_{min}	5 ϕ 12,5	6.15	0.62	0.06752
VC-G523	72.68	2.50	60.67	M_{max}	4 ϕ 16,0	8.04	0.80	0.08119
				M_{min}	5 ϕ 16,0	10.05	1.01	0.09483
VC-G524	109.02	2.50	72.83	M_{max}	6 ϕ 16,0	12.07	1.21	0.10763
				M_{min}	7 ϕ 16,0	14.08	1.41	0.11951

(*) calculada em relação à área total da seção

Os resultados calculados por cada método/modelo para a seção com flecha máxima de cada viga estão nas figuras a seguir.

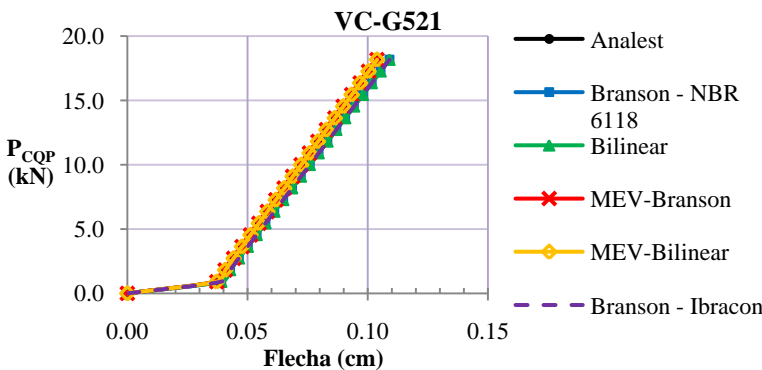


Figura 7.59 – VC-G521: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

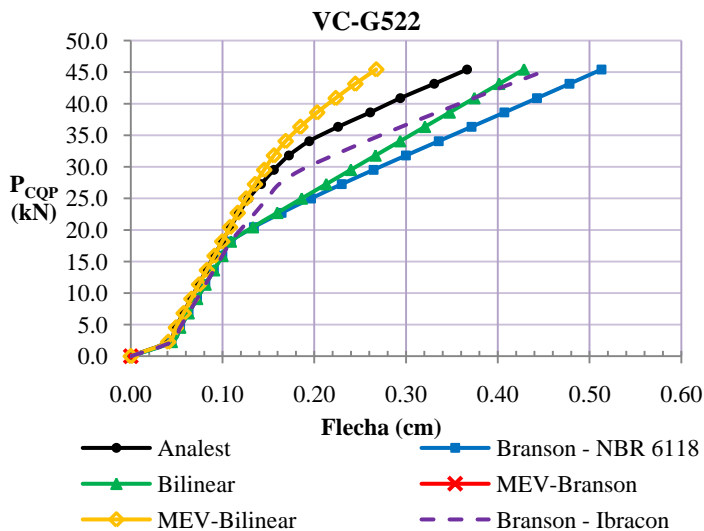


Figura 7.60 – VC-G522: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

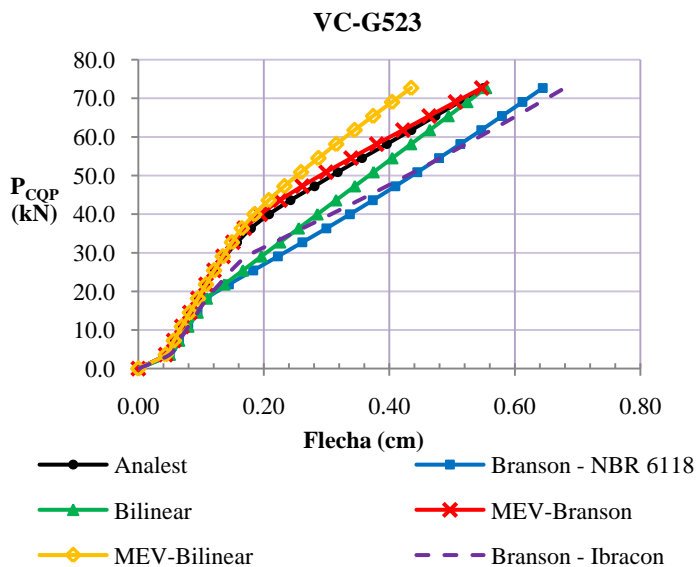


Figura 7.61 – VC-G523: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

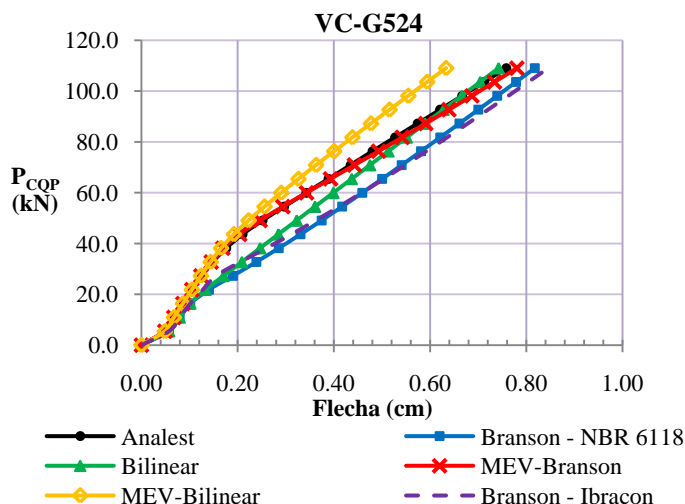


Figura 7.62 – VC-G524: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

A primeira viga não chegou a fissurar, mantendo seu comportamento no estágio I. Na segunda viga, o cálculo pelo MEV-Branson apresentou problema de convergência e por isso não é mostrado. Para as três últimas vigas, o MEV-Bilinear mostrou os menores valores de flechas para o mesmo nível de carga, enquanto que o método Branson-NBR e o Branson-Ibracon, os maiores valores. Mais uma vez observa-se uma maior rigidez no trecho pós-fissuração dos métodos baseados na equação bilinear.

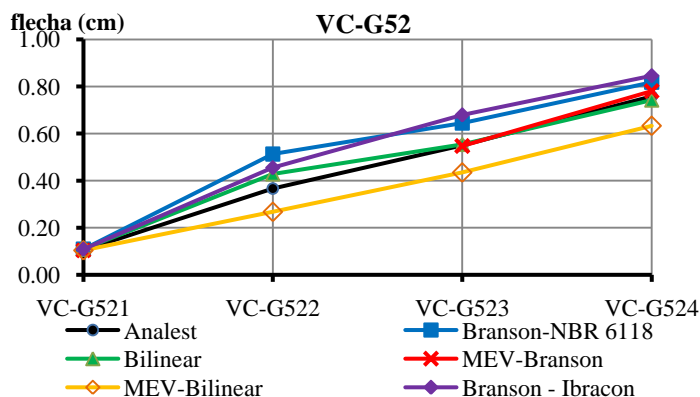


Figura 7.63 – Subgrupo VC-G52: resultados das flechas

Apesar de o cálculo pelo MEV-Branson não ter convergido para a viga VC-G522, para as vigas 3 e 4 do grupo esse modelo apresentou resultados bem próximos ao modelo do Analest, resultando então, na menor média de diferença em relação ao Analest dentre os métodos estudados, conforme pode se observar na tabela 7.25. O método Branson-NBR e o MEV-Bilinear apresentaram as maiores variações em relação ao modelo do Analest. Para este grupo, as diferenças dos diversos métodos/modelos em relação ao modelo do Analest foram menores quando comparadas às diferenças encontradas no grupo anterior.

Tabela 7.25 – Subgrupo VC-G52: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G521	4.14	4.14	4.14	-0.78	-0.78
VC-G522	39.95	24.17	16.90	-	-27.02
VC-G523	17.15	23.50	0.70	-0.54	-20.97
VC-G524	7.83	11.55	-2.10	2.91	-16.50
Média	17.27	15.84	5.96	1.06	16.32

7.2.6 Grupo VC-G6

Este grupo é formado por quatro vigas contínuas de dois vãos com 7 m de comprimento cada, e concreto com resistência à compressão, f_{ck} , de 30 MPa, cujas propriedades estão mostradas na tabela abaixo.

Tabela 7.26 – Grupo VC-G6: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_f (kN.m)
30	36.6	2.896	26071.59	0.002	52.14

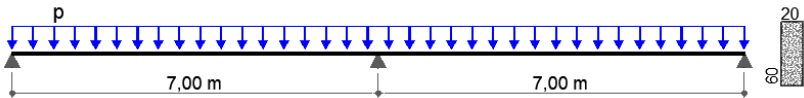


Figura 7.64 – Grupo VC-G6: geometria e tipo de carregamento

O carregamento e armação longitudinal de cada viga estão especificados na tabela seguinte.

Tabela 7.27 – Grupo VC-G6: carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN/m)	$M_{COP > M_r}$ (% vão)	Seção	A_s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VC-G611	12.00	6.14	M_{max}	4 ϕ 10,0	3.14	0.26	0.03775
			M_{min}	3 ϕ 16,0	6.03	0.50	0.05557
VC-G612	21.00	53.00	M_{max}	3 ϕ 16,0	6.03	0.50	0.05557
			M_{min}	6 ϕ 16,0	12.07	1.01	0.08905
VC-G613	27.00	65.29	M_{max}	4 ϕ 16,0	8.04	0.67	0.06727
			M_{min}	8 ϕ 16,0	16.08	1.34	0.10862
VC-G614	36.00	75.00	M_{max}	6 ϕ 16,0	12.07	1.01	0.08905
			M_{min}	7 ϕ 20,0	21.98	1.83	0.13386

(*) calculada em relação à área total da seção

Os resultados de cada viga estão expostos nos gráficos a seguir.

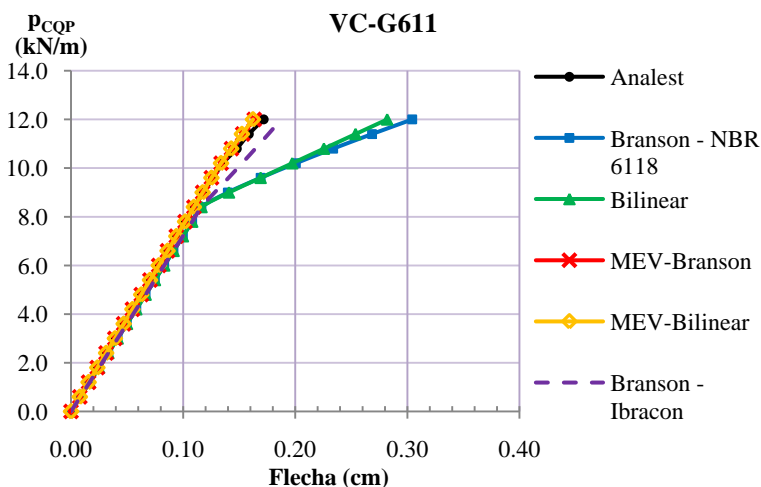


Figura 7.65 – VC-G611: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

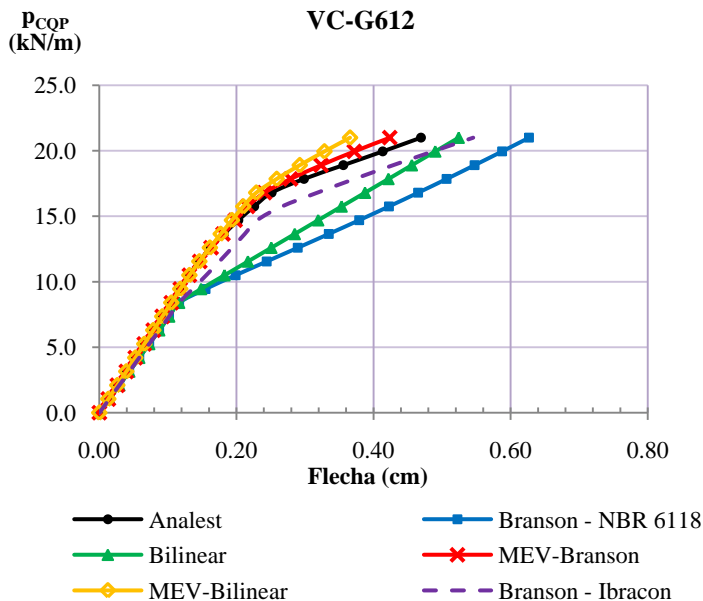


Figura 7.66 – VC-G612: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

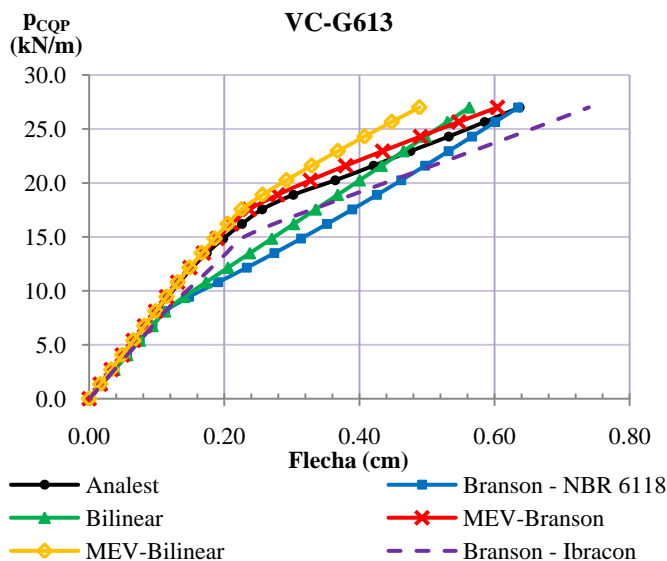


Figura 7.67 – VC-G613: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

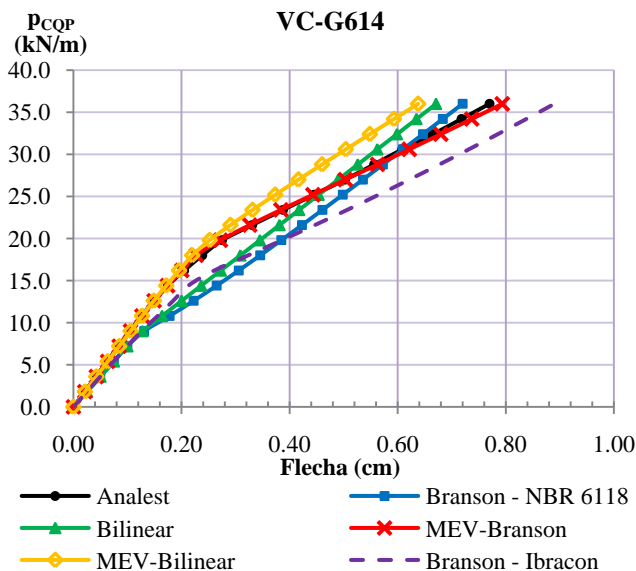


Figura 7.68 – VC-G614: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima

O comportamento das curvas carga-flecha neste grupo se manteve similar aos demais grupos já apresentados, onde os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear entram no estágio II de comportamento na seção analisada para valores de carga menores que os demais modelos, com maior rigidez no trecho pós-fissuração. Para as duas primeiras vigas o método Branson-NBR obteve os maiores valores de flecha para o mesmo nível de carga, enquanto que para as vigas 3 e 4 do grupo os maiores valores foram obtidos pelo método Branson-Ibracon, o qual, apesar de ter carga de mudança do estágio I para estágio II maior que os outros dois métodos simplificados, possui menor rigidez, resultando, assim, nos maiores valores de flecha para a carga final nestas duas vigas. Mais uma vez o MEV-Bilinear forneceu os menores valores de flecha para o mesmo nível de carga, em todas as vigas.

A seguir, na figura 7.69, mostram-se as flechas finais obtidas por cada método/modelo, para cada viga, e as diferenças percentuais dessas flechas em relação às obtidas pelo modelo do Analest estão na tabela 7.28.

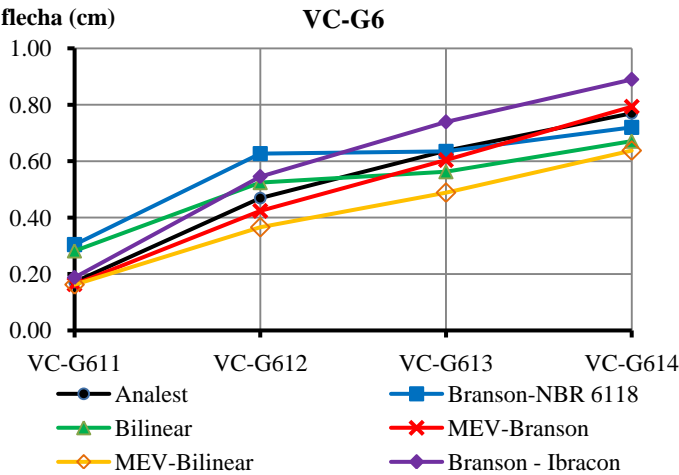


Figura 7.69 – Grupo VC-G6: resultados das flechas finais

Tabela 7.28 – Grupo VC-G6: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G611	76.99	9.06	64.02	-4.93	-5.59
VC-G612	33.63	16.27	11.73	-9.69	-22.06
VC-G613	-0.36	16.03	-11.69	-5.17	-23.31
VC-G614	-6.46	15.61	-12.83	3.07	-17.13
Média	29.36	14.24	25.07	5.72	17.02

O modelo que mostrou os resultados mais próximos ao modelo do Analest foi o MEV-Branson, com diferença média de 5,7%. Todos os outros modelos apresentaram médias de diferença percentual maiores de 14%, com a maior diferença obtida pelo método Branson-NBR (29,4%), devido à grande diferença encontrada nas duas primeiras vigas. Conforme já foi dito anteriormente, essa grande diferença é devido ao fato desse método, assim como o método Bilinear, utilizar a rigidez equivalente da seção mais solicitada para todo um vão, logo o ponto de mudança de rigidez na curva carga-flecha (de inicial elástico para vão todo fissurado) ocorre para uma carga inferior aos demais métodos e modelos.

7.2.7 Grupo VCA-G1

As quatro vigas que formam este grupo possuem dois vãos de comprimentos diferentes. As propriedades do concreto e o momento M_r estão na tabela 7.29, e, a geometria e carregamento, na figura 7.70.

Tabela 7.29 – Grupo VCA-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	6.93

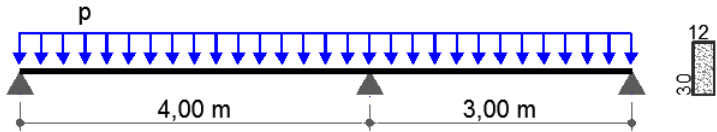


Figura 7.70 – VCA-G1: geometria e tipo de carregamento

Na tabela 7.30 estão especificados o carregamento e armadura de tração de cada viga, onde o $M_{max,V1}$ corresponde à seção com momento positivo máximo no primeiro vão, M_{min} à seção com momento negativo de módulo máximo (apoio intermediário) e $M_{max,V2}$ a seção com momento positivo máximo no segundo vão (para descrição das demais variáveis ver item 7.2.1).

Tabela 7.30 – VCA-G1: carregamento e armação

Viga	P_{COP} (kN/m)	$M_{COP} > M_r$ (% vão 1)	Seção	A_s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VCA-G11	4.275	0	$M_{max,V1}$	2 ϕ 8,0	1.01	0.28	0.04123
			M_{min}	2 ϕ 10,0	1.57	0.44	0.05380
			$M_{max,V2}$	2 ϕ 6,3	0.62	0.17	0.03211
VCA-G12	7.65	50.75	$M_{max,V1}$	2 ϕ 10,0	1.57	0.44	0.05380
			M_{min}	3 ϕ 10,0	2.36	0.66	0.07052
			$M_{max,V2}$	2 ϕ 6,3	0.62	0.17	0.03211
VCA-G13	12.15	71.25	$M_{max,V1}$	4 ϕ 10,0	3.14	0.87	0.08592
			M_{min}	3 ϕ 12,5	3.69	1.03	0.09613
			$M_{max,V2}$	2 ϕ 8,0	1.01	0.28	0.04123
VCA-G14	16.65	79.25	$M_{max,V1}$	4 ϕ 12,5	4.92	1.37	0.11713
			M_{min}	3 ϕ 16,0	6.03	1.68	0.13401
			$M_{max,V2}$	2 ϕ 10,0	1.57	0.44	0.05380

(*) calculada em relação à área total da seção

Conforme já explicado, o detalhamento das armaduras está no Anexo A, item A.2. A seguir estão os resultados das flechas calculados pelos diferentes métodos e modelos para cada viga, mostrados pela relação carga aplicada versus flecha máxima. Os gráficos com a flecha calculada para a carga total de serviço ao longo da viga estão no Anexo B, item B.2. A seção mostrada é a seção que apresentou flecha máxima no primeiro vão.

No primeiro gráfico (figura 7.71) estão os resultados da viga VCA-G11, onde se percebe que nenhuma dos modelos entrou no estágio II de comportamento, já que a viga não foi solicitada por momento maior que o momento de fissuração.

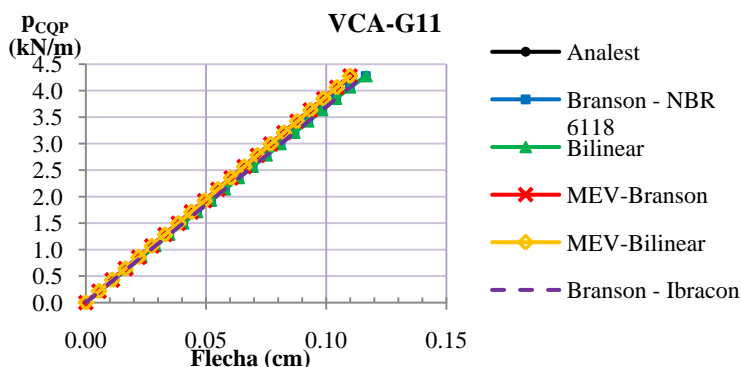


Figura 7.71 – VCA-G11: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

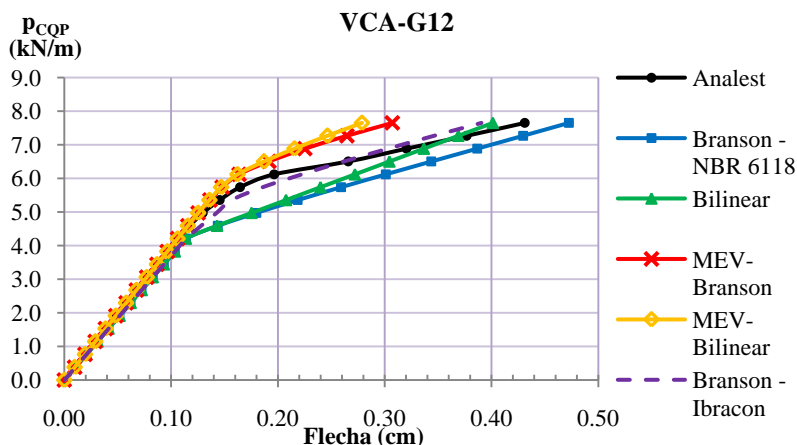


Figura 7.72 – VCA-G12: gráfico carga aplicada versus flecha da seção para seção com flecha máxima no primeiro vão

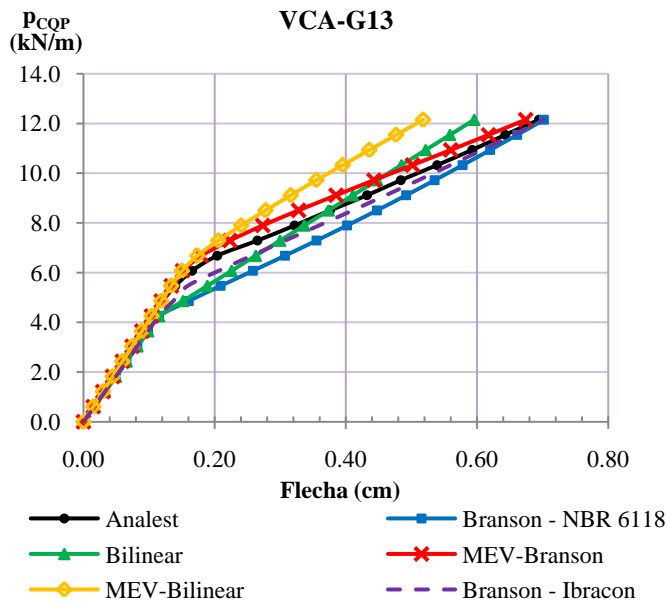


Figura 7.73 – VCA-G13: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

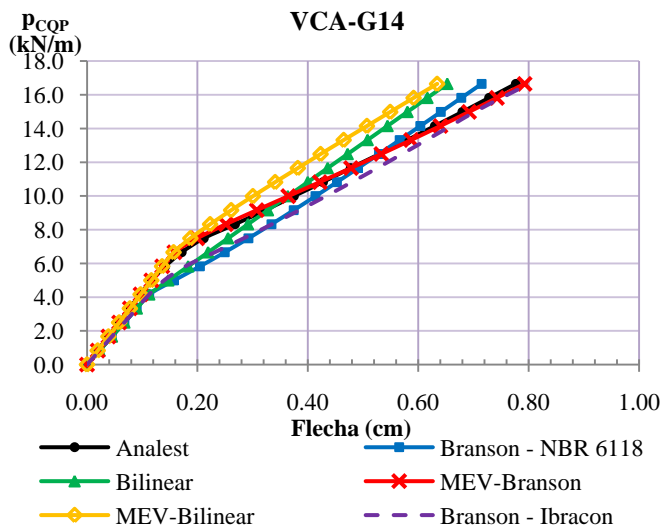


Figura 7.74 – VCA-G14: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

Na segunda viga, a curva do método Branson-Ibracon ficou bem próxima à do modelo do Analest; já na viga 3, o MEV-Branson e o Branson-Ibracon foram os modelos que mais se aproximaram e, na viga 4, o MEV-Branson apresentou resultados quase que coincidentes com o modelo do Analest. Novamente os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentaram valores de carga de mudança do estágio I para estágio II na seção analisada menores que os demais modelos.

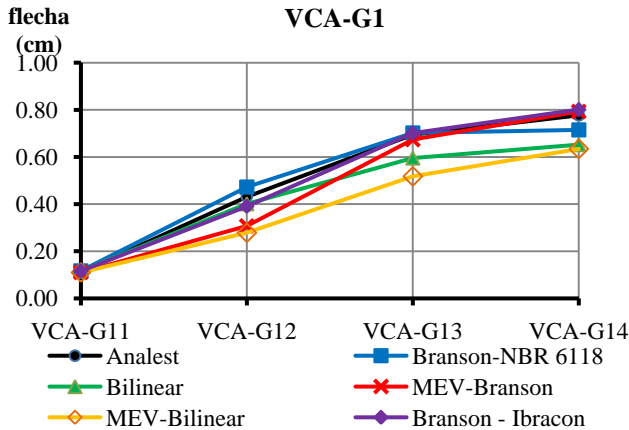


Figura 7.75 – Grupo VCA-G1: resultado das flechas finais

A figura 7.75 mostra os valores de flecha final (carga total de serviço) obtida pelos diferentes métodos/modelos, para cada viga, e a tabela 7.31 mostra as diferenças percentuais em relação às flechas finais obtidas pelo modelo do Analest.

Tabela 7.31 – Grupo VCA-G1: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VCA-G11	4.97	4.40	5.21	-0.94	-0.94
VCA-G12	9.57	-9.43	-6.95	-28.78	-35.36
VCA-G13	1.10	0.98	-14.22	-2.91	-25.43
VCA-G14	-7.97	3.10	-15.99	2.07	-18.34
Média	5.90	4.48	10.59	8.67	20.02

Para este grupo de vigas percebeu-se que houve uma maior proximidade das flechas finais calculadas pelos diferentes métodos, com exceção do MEV-Bilinear que obteve valores de flecha em média 20% abaixo dos valores obtidos pelo modelo do Analest. Diferentemente do ocorrido nos outros grupos já estudados, para este grupo o método simplificado Branson-NBR e o Branson-Ibracon, mostraram os resultados de flecha para a carga final mais próximos aos do modelo do Analest. No entanto, excluindo-se a viga VCA-G12, pode-se dizer que MEV-Branson foi o modelo que mostrou a melhor aproximação dos resultados ao modelo do Analest.

7.2.8 Grupo VCA-G2

Este segundo grupo de vigas de geometria assimétrica também é formado por quatro vigas. Os dados do concreto e o momento M_r estão mostrados na tabela 7.32, e a figura 7.76 ilustra a geometria e o carregamento das vigas.

Tabela 7.32 – Grupo VCA-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25.0	31.6	2.565	23800	0.002	14.36

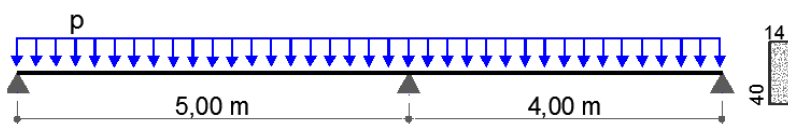


Figura 7.76 – Grupo VCA-G2: geometria e tipo de carregamento

Na tabela 7.33 estão especificados o carregamento e armaduras de cada viga do grupo, da mesma forma que na tabela 7.30 (item 7.2.7).

E nas próximas quatro figuras estão os gráficos carga aplicada versus flecha máxima (no primeiro vão), para cada viga, expondo os resultados calculados por cada método/modelo.

Tabela 7.33 – Grupo VCA-G1: carregamento e armação

Viga	PCOP (kN/m)	M _{COP>M_r} Vão 1 (%)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VCA-G11	7.25	4.4	M _{max,V1}	2 ϕ10,0	1.57	0.28	0.04121
			M _{min}	3 ϕ10,0	2.36	0.42	0.05264
			M _{max,V2}	2 ϕ 8,0	1.01	0.18	0.03281
VCA-G12	11.4	56.6	M _{max,V1}	3 ϕ10,0	2.35	0.42	0.05249
			M _{min}	3 ϕ12,5	3.69	0.66	0.07077
			M _{max,V2}	2 ϕ10,0	1.57	0.28	0.04121
VCA-G13	15.55	69.8	M _{max,V1}	3 ϕ12,5	3.69	0.66	0.07077
			M _{min}	3 ϕ16,0	6.03	1.08	0.09948
			M _{max,V2}	2 ϕ10,0	1.57	0.28	0.04121
VCA-G14	19.7	76.6	M _{max,V1}	4 ϕ12,5	4.92	0.88	0.08636
			M _{min}	4 ϕ 16,0	8.04	1.44	0.12108
			M _{max,V2}	2 ϕ12,5	2.46	0.44	0.05405

(*) calculada em relação à área total da seção

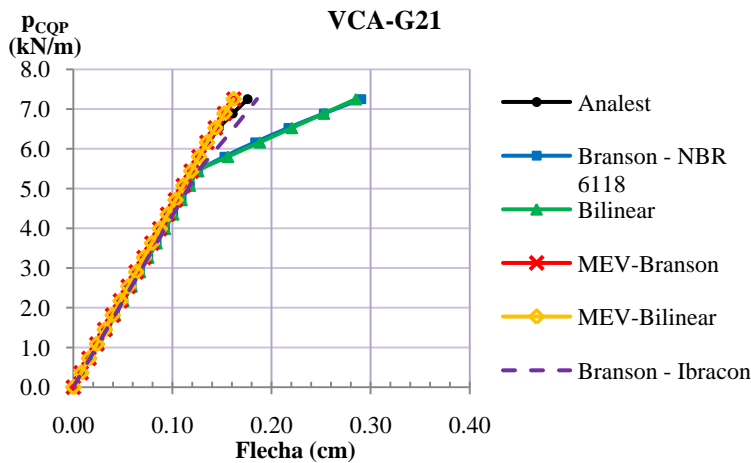


Figura 7.77 – VCA-G21: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

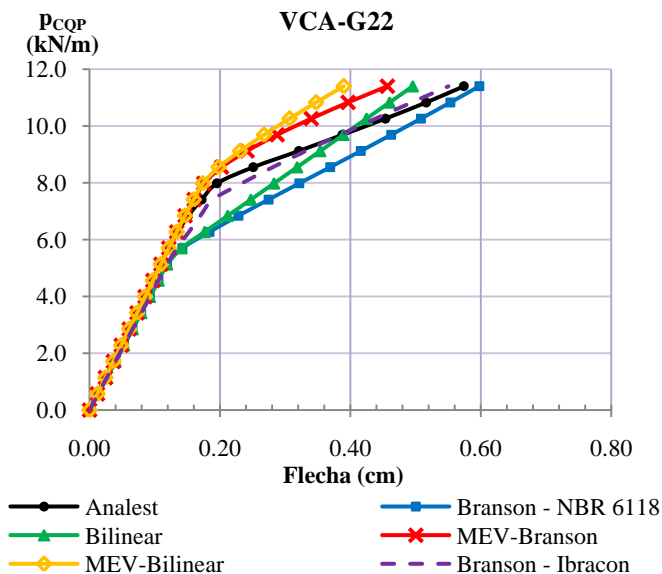


Figura 7.78 – VCA-G22: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

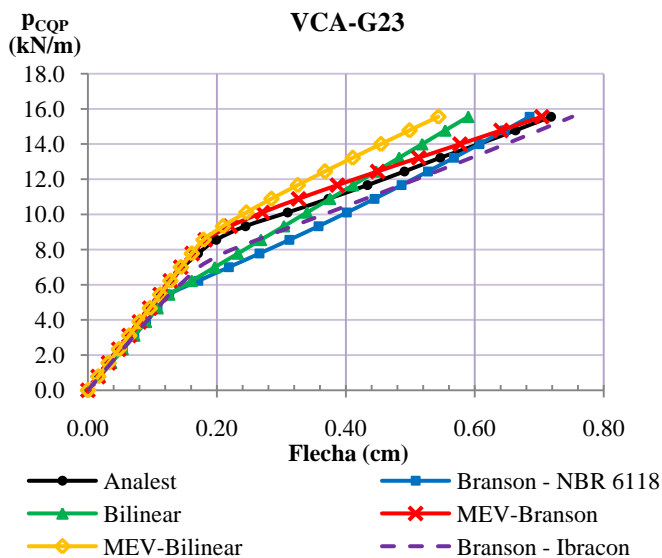


Figura 7.79 – VCA-G23: gráfico carga aplicada versus flecha da seção para seção com flecha máxima no primeiro vão

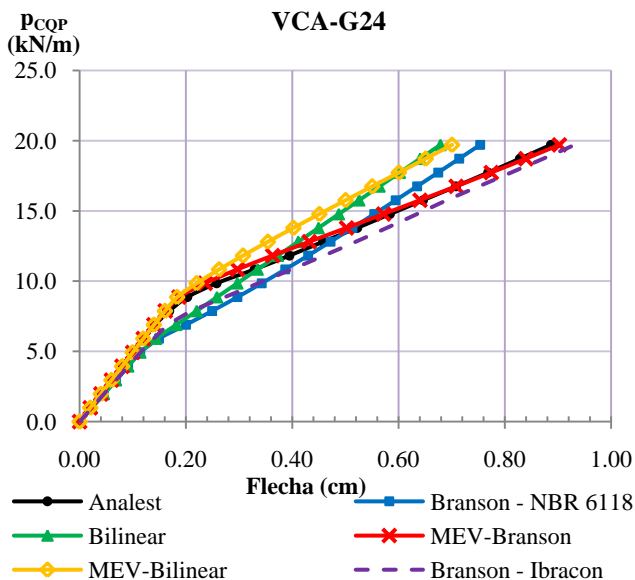


Figura 7.80 – VCA-G24: gráfico carga aplicada versus flecha para seção com flecha máxima no primeiro vão

A figura 7.81 mostra os valores de flecha final (para carga total de serviço) obtida pelos diferentes métodos/modelos, para cada viga, e a tabela 7.34 mostra as diferenças percentuais em relação às flechas finais obtidas pelo modelo do Analtest.

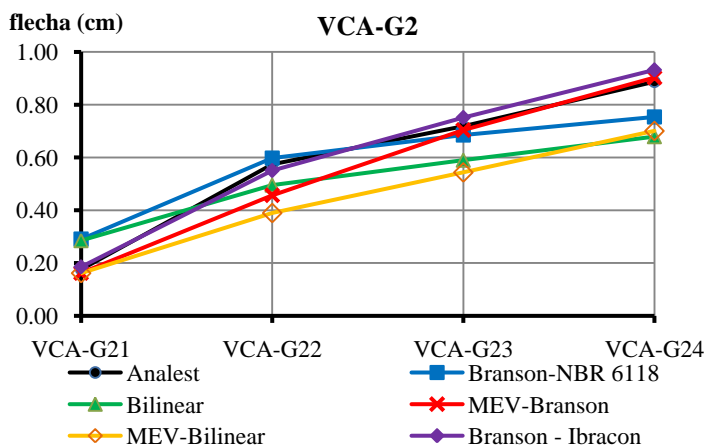


Figura 7.81 – Grupo VCA-G2: resultado das flechas finais

Tabela 7.34 – Grupo VCA-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VCA-G21	65.14	5.36	62.11	-7.87	-8.01
VCA-G22	4.14	-4.12	-13.67	-20.42	-32.10
VCA-G23	-4.61	4.61	-17.88	-1.98	-24.32
VCA-G24	-15.02	5.07	-23.44	1.79	-20.99
Média	22.23	4.79	29.28	8.02	21.35

As flechas finais calculadas pelo MEV-Bilinear novamente se mantiveram em torno de 20% abaixo das calculadas pelo modelo do Analest. Os métodos Branson-NBR e Bilinear apresentaram uma diferença muito grande em relação ao modelo do Analest para a primeira viga, pelo mesmo motivo explicado anteriormente (ver item 7.2.1), mas resultados mais próximos para a viga 2 e 3 do grupo, principalmente para o método Branson-NBR. O método simplificado Branson-Ibracon foi o que mostrou resultados mais próximos aos resultados do modelo do Analest e uma variação constante de viga para viga. O MEV-Branson também mostrou resultados muito próximos aos do Analest, sendo as curvas carga-flecha quase coincidentes, com exceção da viga VCA-G22.

Neste grupo a maior média de diferença percentual das flechas finais em relação às calculadas pelo modelo do Analest foi encontrada para o método Bilinear, quase 30%.

7.3 Vigas teóricas de três vãos

Além das vigas contínuas com dois vãos, resolveu-se estudar também algumas vigas contínuas de três vãos, por serem muito utilizadas nas edificações de concreto armado, e por não ter sido encontrado nenhum estudo sobre os resultados de flecha imediata de vigas obtidos pelos diferentes métodos e modelos para vigas com esta geometria. Outro motivo é para a melhor avaliação do método simplificado Branson-Ibracon, o qual, para o vão central destas vigas, irá utilizar três valores de rigidez, devido à configuração do diagrama de momento fletor, conforme já descrito anteriormente.

Como não foi encontrada na bibliografia disponível referente ao assunto nenhuma viga de três vãos que tenha sido ensaiada experimentalmente, que possibilitasse comparar os valores

experimentais aos calculados pelos modelos teóricos para a avaliação destes modelos, a análise dos resultados das vigas estudadas será feita adotando-se como referência os resultados calculados pelo modelo de EF do Analest, já que, para as vigas biapoiadas e contínuas de dois vãos, esse foi o modelo que mostrou os melhores resultados de flecha imediata quando comparados a resultados experimentais.

Foram estudados quatro grupos de vigas contínuas de três vãos, apresentados nos itens a seguir.

7.3.1 Grupo VC3V-G1

Este primeiro grupo, assim como os demais, é formado por quatro vigas submetidas a carregamento distribuído, como pode ser visto na figura 7.83. As propriedades do concreto e o momento M_r estão mostrados na tabela 7.35.

Tabela 7.35 – Grupo VC3V-G1: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	15.39

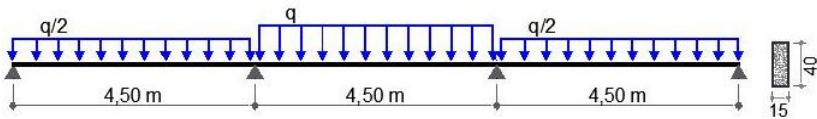


Figura 7.82 – Grupo VC3V-G1: geometria e carregamento

Na tabela 7.36 estão os dados do carregamento e armação de cada viga, sendo especificadas a armação longitudinal da seção com momento fletor positivo máximo no primeiro vão ($M_{max,V1}$), da seção com momento fletor negativo com valor máximo (M_{min}) que é a seção dos apoios intermediários, e a armação da seção com momento fletor positivo máximo no vão central ($M_{max,VC}$). A terceira coluna contém a porcentagem da extensão do vão central que está fissurada e as demais variáveis foram explicadas anteriormente (ver item 7.2.1).

Tabela 7.36 – Grupo VC3V-G1: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN/m)	M _{COP} >M _r Vão central (%)	Seção	A _s		ρ (%)*	α
				barras	cm ²		
VCA-G11	9	0.00	M _{max,Vl}	2 ϕ 8,0	1.01	0.17	0.03178
			M _{min}	2 ϕ 10,0	1.57	0.26	0.03966
			M _{max,VC}	2 ϕ 8,0	1.01	0.17	0.03178
VCA-G12	19	43.56	M _{max,Vl}	2 ϕ 10,0	1.57	0.26	0.03966
			M _{min}	3 ϕ 12,5	3.69	0.62	0.06752
			M _{max,VC}	3 ϕ 10,0	2.36	0.39	0.05040
VCA-G13	29	65.33	M _{max,Vl}	3 ϕ 10,0	2.36	0.39	0.05040
			M _{min}	3 ϕ 16,0	6.03	1.01	0.09483
			M _{max,VC}	3 ϕ 12,5	3.69	0.62	0.06752
VCA-G14	39	74.67	M _{max,Vl}	4 ϕ 10,0	3.14	0.52	0.06058
			M _{min}	5 ϕ 16,0	10.05	1.68	0.13401
			M _{max,VC}	3 ϕ 16,0	6.03	1.01	0.09483

(*) calculada em relação à área total da seção

O detalhamento das armaduras longitudinais das vigas deste grupo e também dos demais grupos está no Anexo A, item A.2. A seguir estão os resultados das flechas calculadas pelos diferentes métodos e modelos para cada viga, na seção central do vão central, mostrados pela relação carga-flecha. Os resultados das flechas ao longo da viga para a carga final de serviço estão no Anexo B, item B.2.

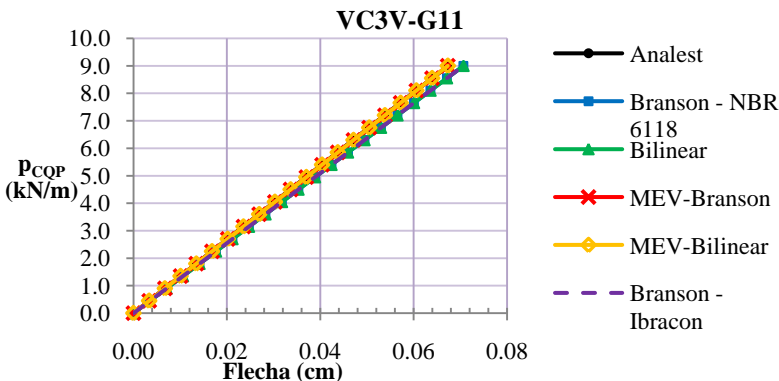


Figura 7.83 – VC3V-G11: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

A primeira viga, por não atingir o limite de fissuração na seção analisada (seção central do vão central), apresentou comportamento ainda dentro do Estádio I, como pode ser visto na figura 7.84.

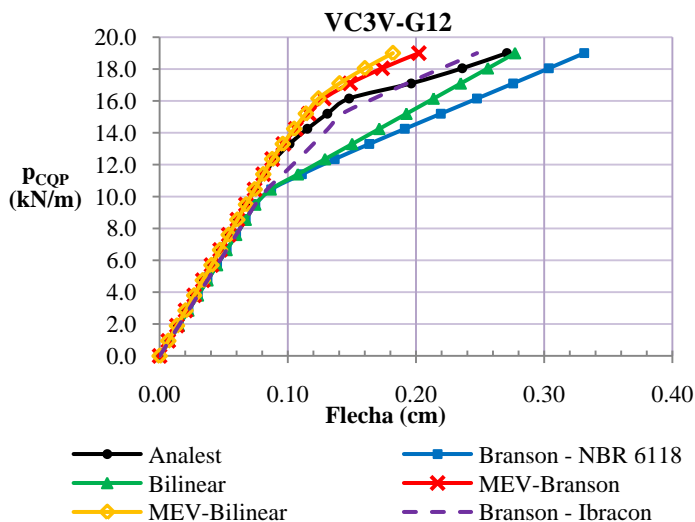


Figura 7.84 – VC3V-G12: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

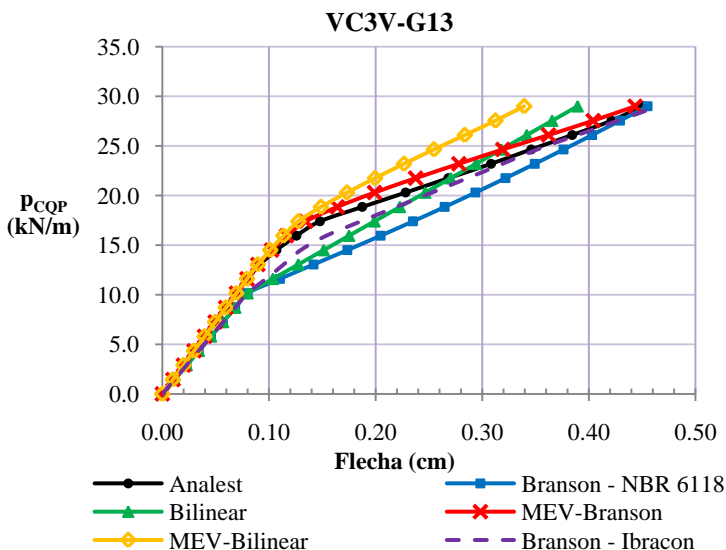


Figura 7.85 – VC3V-G13: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

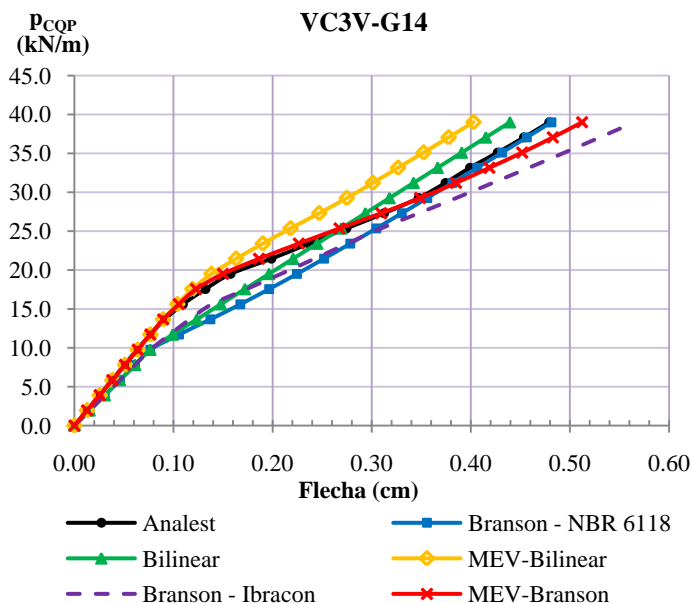


Figura 7.86 – VC3V-G14: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

A partir dos gráficos das vigas 3 e 4, observa-se que o MEV-Branson apresentou a curva carga-flecha mais próxima à do modelo do Analest, enquanto que, para a viga 2, a curva do método Branson-Ibracon foi a que mais se aproximou à do modelo do Analest.

Na próxima figura está o valor das flechas finais (para a carga total de serviço) para cada viga, na seção analisada, calculada por cada modelo/método. O gráfico permite visualizar a variação das flechas finais de viga para viga, onde se aumenta a solicitação, a taxa de armadura e também a extensão do vão fissurado da primeira viga até a última. A tabela 7.37 mostra as diferenças percentuais de flechas finais dos diversos métodos/modelos em relação ao modelo do Analest.

Pela figura 7.88, constata-se que para as vigas 2, 3 e 4 deste grupo, o MEV-Bilinear apresentou os menores valores de flecha final. Para a viga 2, o método Bilinear apresentou resultado muito próximo ao do Analest, e para as vigas 3 e 4, valores menores de flecha final, com variação em relação ao Analest conforme mostrado na tabela 7.37. Para a viga 2 do grupo (VC3V-G12), os modelos refinados MEV-Branson e MEV-Bilinear apresentaram valores com bastante diferença em relação aos do Analest, -25% e -33% respectivamente. Para as vigas 3 e 4 os resultados do MEV-Branson e do método Branson-NBR foram os que

mais se aproximaram aos do modelo do Analest. O MEV-Bilinear obteve a maior média de diferença percentual (18%) enquanto que os demais apresentaram uma média de variação dos resultados similar, em torno de 8%.

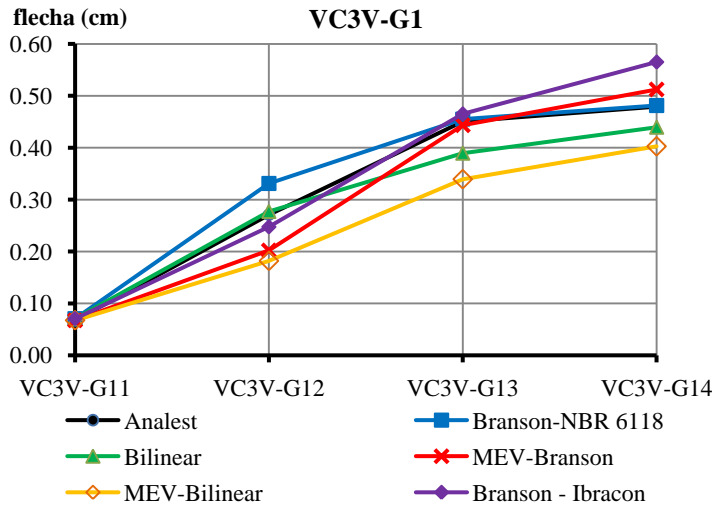


Figura 7.87 – Grupo VC3V-G1: resultados das flechas finais

Tabela 7.37 – Grupo VC3V-G1: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC3V-G11	4.65	4.65	4.65	-0.31	-0.31
VC3V-G12	22.29	-8.59	2.38	-25.34	-32.83
VC3V-G13	1.05	3.27	-13.53	-1.57	-24.67
VC3V-G14	0.48	17.98	-8.25	6.94	-15.94
Média	7.12	8.62	7.20	8.54	18.44

7.3.2 Grupo VC3V-G2

Este segundo grupo apresenta as mesmas características do primeiro, conforme pode ser visto nas tabelas e figura seguintes.

Tabela 7.38 – Grupo VC3V-G2: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	32.06

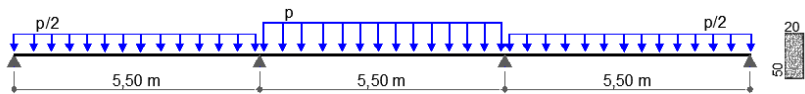


Figura 7.88 – Grupo VC3V-G2: geometria e tipo de carregamento

Na tabela 7.39 estão especificados os dados de cada viga, e os resultados para cada viga, em termos de carga aplicada versus flecha na seção central da viga, obtidos pelos diferentes métodos e modelos estão mostrados nas figuras 7.90 a 7.93.

Na primeira viga (figura 7.90) as curvas carga-flecha dos métodos Bilinear e Branson-NBR diferem das dos demais modelos, com uma bifurcação no ponto de fissuração para uma carga inferior à obtida pelos demais modelos, pelo motivo já explicado anteriormente (ver item 7.2.1).

Tabela 7.39 – Grupo VC3V-G2: carregamento e armação

Viga	p_{COP} (kN/m)	$M_{COP} > M_r$ Vão Central (%)	Seção	M_{COP} (kN.m)	A_s		ρ (%) [*]	α
					barras	cm ²		
VC3V-G21	18.85	8.00	$M_{max,V1}$	17.46	2 $\phi 10,0$	1.57	0.16	0.03081
			$M_{min,apoio}$	42.77	3 $\phi 12,5$	3.69	0.37	0.04845
			$M_{max,VC}$	28.51	2 $\phi 12,5$	2.46	0.25	0.03835
VC3V-G22	34.6	59.27	$M_{max,V1}$	32.04	4 $\phi 10,0$	3.14	0.31	0.04398
			$M_{min,apoio}$	78.50	4 $\phi 16,0$	8.04	0.80	0.08119
			$M_{max,VC}$	52.33	4 $\phi 12,5$	4.92	0.49	0.05817
VC3V-G23	39.85	64.73	$M_{max,V1}$	36.92	3 $\phi 12,5$	3.69	0.37	0.04845
			$M_{min,apoio}$	90.41	5 $\phi 16,0$	10.06	1.01	0.09489
			$M_{max,VC}$	60.27	3 $\phi 16,0$	6.03	0.60	0.06662
VC3V-G24	50.35	72.73	$M_{max,V1}$	46.65	4 $\phi 12,5$	4.92	0.49	0.05817
			$M_{min,apoio}$	114.23	7 $\phi 16,0$	14.08	1.41	0.11951
			$M_{max,VC}$	76.15	4 $\phi 16,0$	8.04	0.80	0.08119

(*) calculada em relação à área total da seção

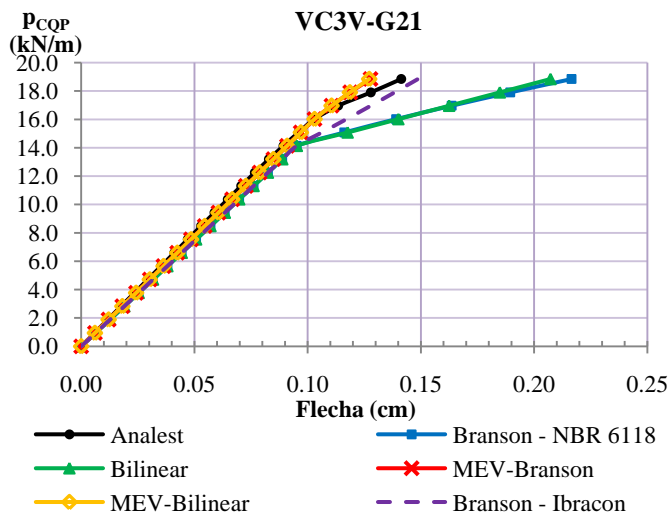


Figura 7.89 – VC3V-G21: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

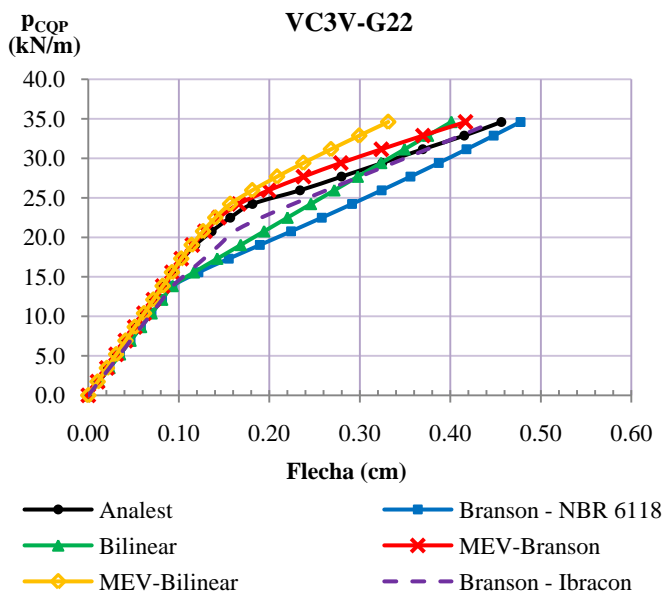


Figura 7.90– VC3V-G22: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

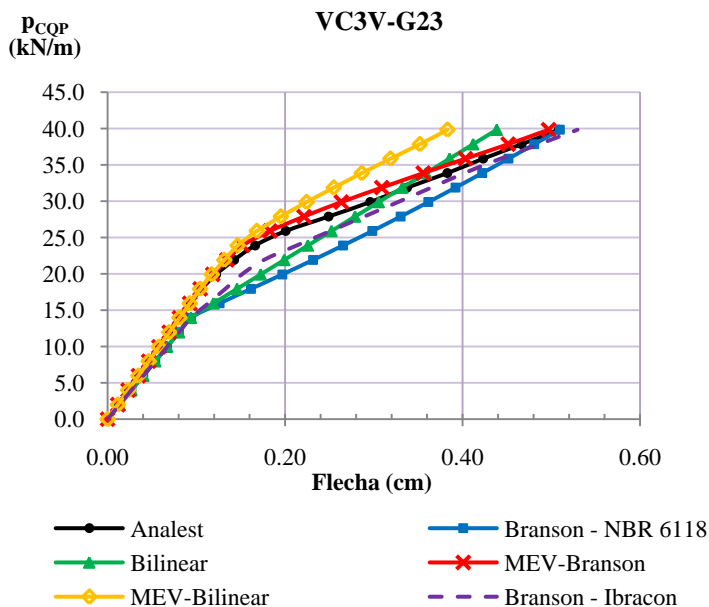


Figura 7.91 – VC3V-G23: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

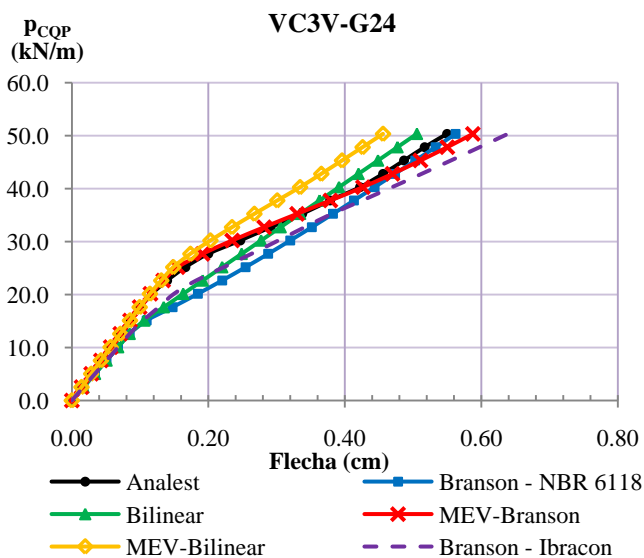


Figura 7.92 – VC3V-G24: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

De uma maneira geral, o MEV-Branson foi o modelo que mostrou a curva carga-flecha mais próxima à do modelo do Analest, seguido do modelo do Branson-Ibracon. Assim como nos demais grupos estudados, o MEV-Bilinear e o método Bilinear apresentaram rigidez similar e maior que dos demais modelos no trecho após a fissuração do concreto.

Na figura 7.94 estão os resultados das flechas finais (para carga total de serviço), calculadas para as vigas deste grupo, e na tabela 7.40 as diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest.

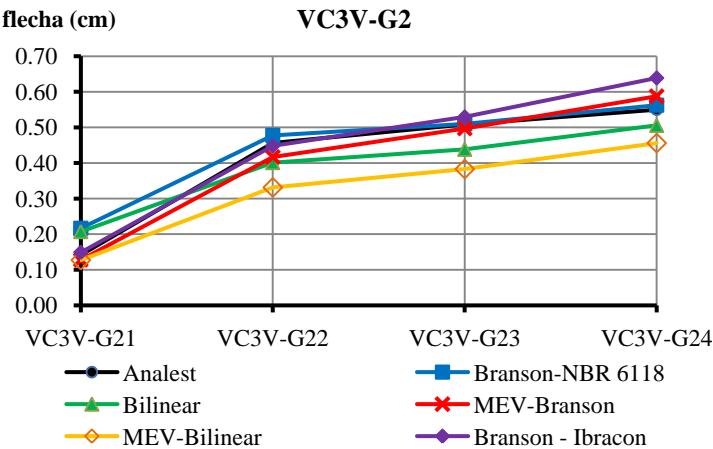


Figura 7.93 – Grupo VC3V-G2: resultados das flechas finais

Tabela 7.40 – Grupo VC3V-G2: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC3V-G21	53.23	5.25	46.62	-9.60	-10.02
VC3V-G22	4.63	-1.84	-12.12	-8.68	-27.39
VC3V-G23	0.26	4.17	-13.75	-2.25	-24.65
VC3V-G24	2.27	16.23	-8.03	6.88	-17.07
Média	15.10	6.87	20.13	6.85	19.78

Na primeira viga do grupo, os maiores valores de flecha final foram obtidos pelo método Bilinear e método Branson-NBR com grande diferença dos demais. Para as outras três vigas, o MEV-Bilinear apresentou os menores valores de flecha final, seguido do método Bilinear. Para as vigas 3 e 4, o método Branson-Ibracon obteve os maiores valores de flecha final. O método Branson-NBR apresentou boa proximidade aos resultados do Analest, com exceção da primeira viga. O método Branson-Ibracon e o MEV-Branson apresentaram as menores médias de diferença percentual de flechas finais em relação ao modelo do Analest, em torno de 6,9% para ambos. Já o MEV-Bilinear e o método Bilinear apresentaram as maiores diferenças, com média em torno de 20% para ambos (média calculada com valores em módulo).

7.3.3 Grupo VC3V-G3

A geometria se diferencia neste grupo dos dois primeiros estudados por possuir o vão central com maior extensão que os demais, e estar solicitado a carregamento uniforme de mesmo valor ao longo de toda a viga, conforme ilustra a figura 7.95. Os dados das vigas estão apresentados nas tabelas 7.41 e 7.42.

Tabela 7 41 – Grupo VC3V-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ε_0	M_r (kN.m)
25.00	31.60	2.565	23800	0.002	27.16

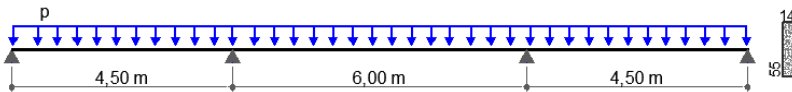


Figura 7.94 – Grupo VC3V-G3: geometria e tipo de carregamento

Pelos resultados mostrados nos gráficos carga aplicada versus flecha na seção central mostrados nas figuras 7.96 a 7.99, pode-se observar que para a primeira viga, que possui 6,7% de extensão do vão central fissurado, os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentaram na curva carga-flecha um valor de carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II de comportamento, na seção analisada, inferior aos demais modelos, o que também ocorreu nas demais vigas, resultando em maiores valores de flecha final,

correspondente à carga total de serviço, conforme pode ser visto na figura 7.96.

Tabela 7.42 – Grupo VC3V-G3: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN/m)	M _{COP>M_r} Vão central (%)	Seção	A _s		ρ (%)	α
				barras	cm ²		
VC3V-G31	11.9	6.67	M _{max,Vl}	2 ϕ10,0	1.57	0.20	0.03481
			M _{min,apoio}	4 ϕ10,0	3.14	0.41	0.05155
			M _{max,VC}	3 ϕ10,0	2.36	0.31	0.04336
VC3V-G32	18.55	36.67	M _{max,Vl}	3 ϕ10,0	2.36	0.31	0.04336
			M _{min,apoio}	3 ϕ16,0	6.03	0.78	0.07972
			M _{max,VC}	4 ϕ10,0	3.14	0.41	0.05155
VC3V-G33	25.2	58.00	M _{max,Vl}	3 ϕ12,5	3.69	0.48	0.05717
			M _{min,apoio}	4 ϕ 16,0	8.04	1.04	0.09738
			M _{max,VC}	4 ϕ12,5	4.92	0.64	0.06930
VC3V-G34	35.175	71.00	M _{max,Vl}	4 ϕ12,5	4.92	0.64	0.06930
			M _{min,apoio}	6 ϕ 16,0	12.07	1.57	0.12834
			M _{max,VC}	3 ϕ 16,0	6.03	0.78	0.07972

(*) calculada em relação à área total da seção

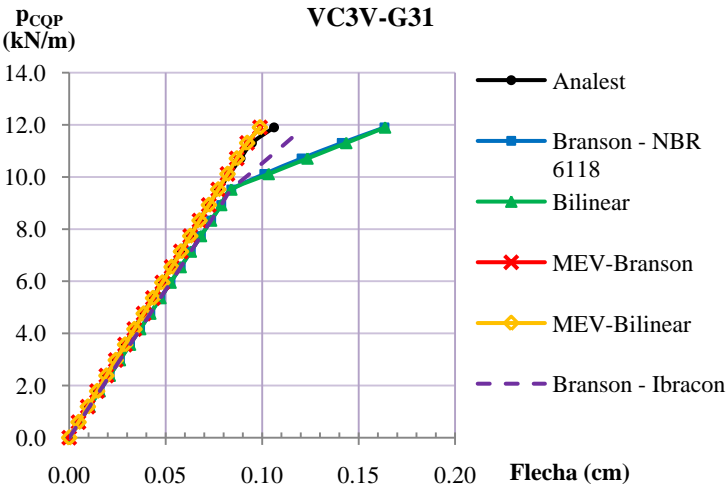


Figura 7.95 – VC3V-G31: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

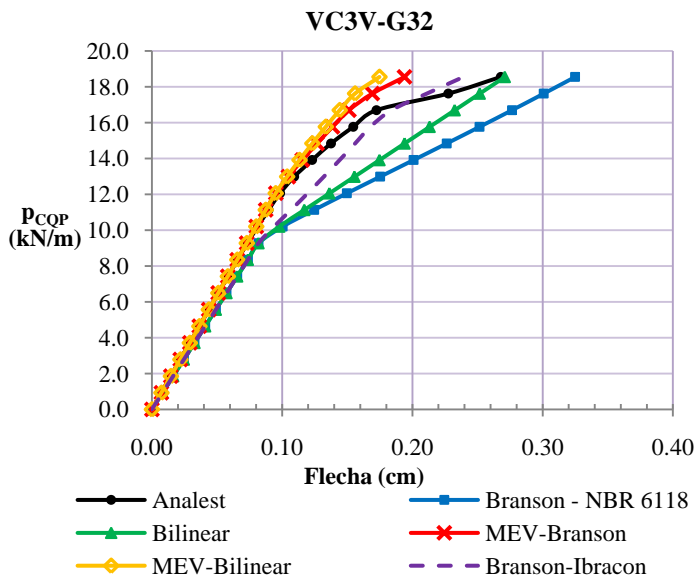


Figura 7.96 – VC3V-G32: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

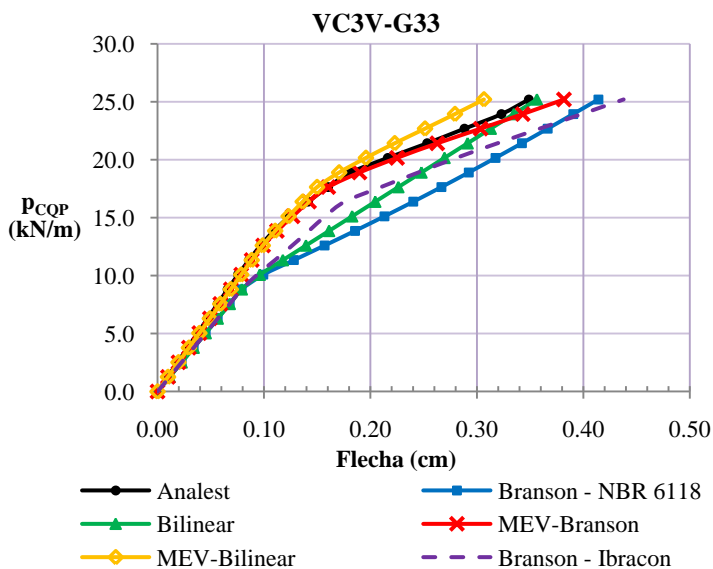


Figura 7.97 – VC3V-G33: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

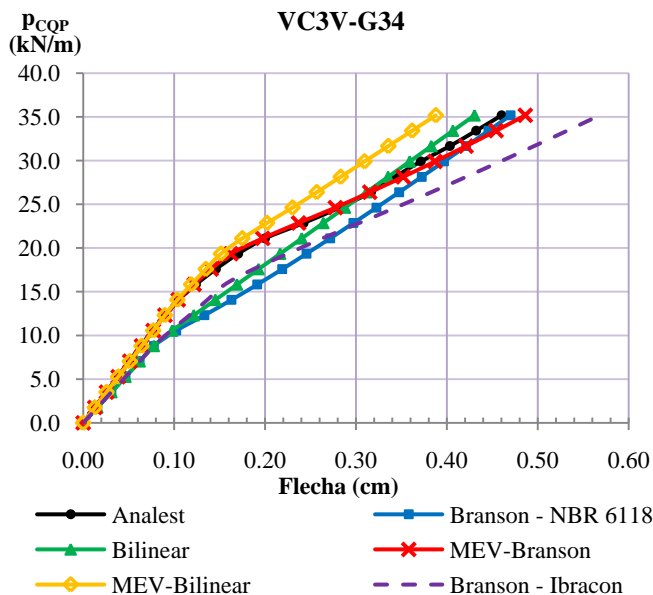


Figura 7.98 – VC3V-G34: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

Para todas as vigas, o MEV-Branson foi o modelo que apresentou a curva carga-flecha mais próxima à do modelo do Analest.

Na figura 7.100 estão os resultados das flechas finais (para carga total de serviço), calculadas para as vigas deste grupo, e na tabela 7.43 as diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest.

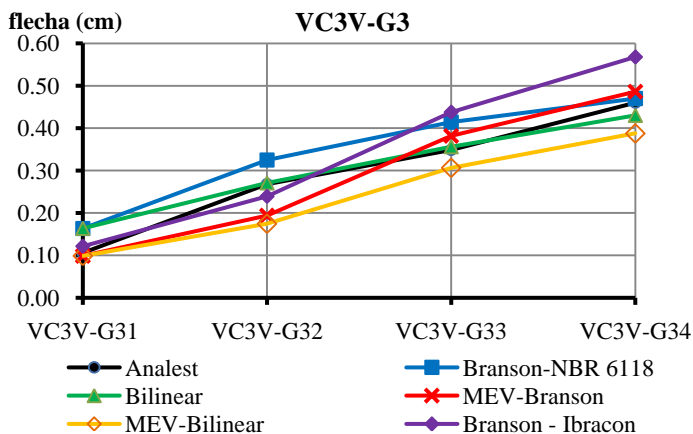


Figura 7.99 – Grupo VC3V-G3: resultados das flechas finais

Tabela 7.43 – Grupo VC3V-G3: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC3V-G31	53.91	14.55	54.23	-6.82	-6.89
VC3V-G32	21.30	-10.70	1.16	-27.59	-34.78
VC3V-G33	18.74	25.52	2.17	9.46	-12.10
VC3V-G34	2.13	23.42	-6.49	5.65	-15.73
Média	24.02	18.55	16.01	12.38	17.37

Para as vigas 2, 3 e 4 do grupo, os menores valores de flecha final foram obtidos pelo MEV-Bilinear. Neste grupo todos os modelos e métodos apresentaram média de diferença percentual dos valores de flecha final em relação aos obtidos pelo modelo do Analest maiores que 10%, sendo a maior média obtida pelo Branson-NBR, de 24%, e a menor média pelo MEV-Branson, 12,4%.

7.3.4 Grupo VC3V-G4

As vigas do quarto grupo de vigas de 3 vãos estudados segue o mesmo padrão do último grupo, diferindo nas dimensões das vigas, conforme pode ser visto nas tabelas e figura seguintes.

Tabela 7.44 – Grupo VC3V-G3: propriedades do concreto e momento de fissuração

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	15.58

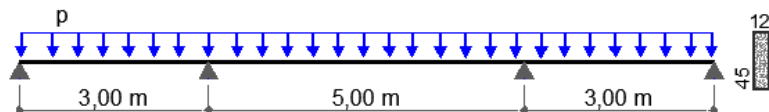


Figura 7.100 – Grupo VC3V-G4: geometria e tipo de carregamento

Tabela 7.45 – Grupo VC3V-G4: carregamento e armação

Viga	P _{COP} (kN/m)	M _{COP} >M _r Vão central (%)	Seção	A _s		ρ (%)	α
				barras	cm ²		
VC3V-G41	9.2	2	M _{max,Vl}	2 ϕ 8,0	1.01	0.19	0.03338
			M _{min,apoio}	2 ϕ 10,0	1.57	0.29	0.04207
			M _{max,VC}	2 ϕ 10,0	1.57	0.29	0.04207
VC3V-G42	17.2	48	M _{max,Vl}	2 ϕ 8,0	1.01	0.19	0.03338
			M _{min,apoio}	4 ϕ 10,0	3.14	0.58	0.06501
			M _{max,VC}	3 ϕ 10,0	2.36	0.44	0.05387
VC3V-G43	25.2	70.4	M _{max,Vl}	2 ϕ 8,0	1.01	0.19	0.03338
			M _{min,apoio}	3 ϕ 16,0	6.03	1.12	0.10201
			M _{max,VC}	3 ϕ 12,5	3.69	0.68	0.07256
VC3V-G44	33.2	72.4	M _{max,Vl}	2 ϕ 10,0	1.57	0.29	0.04207
			M _{min,apoio}	4 ϕ 16,0	8.04	1.49	0.12405
			M _{max,VC}	3 ϕ 16,0	6.03	1.12	0.10201

(*) calculada em relação à área total da seção

Nas figuras 7.102 a 7.105 estão os gráficos carga aplicada versus flecha obtidos para cada viga para a seção central do vão central, que é a seção com flecha máxima.

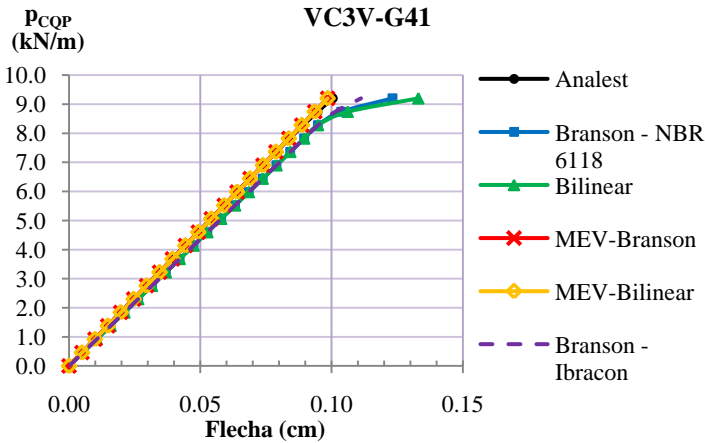


Figura 7.101 – VC3V-G41: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

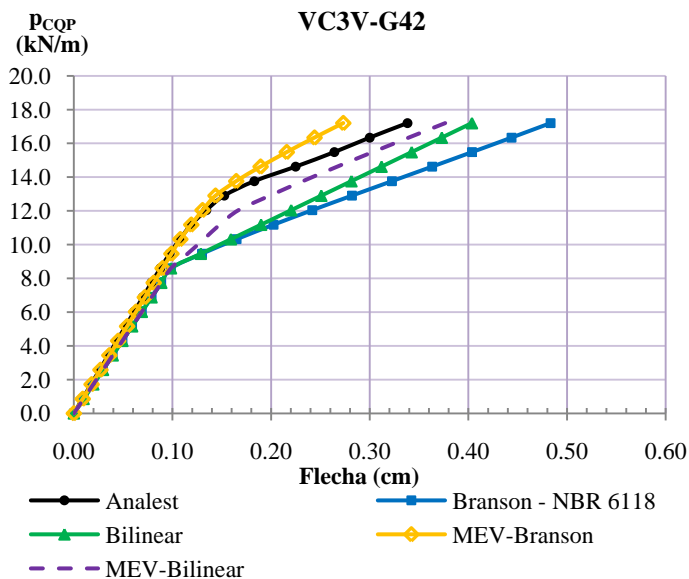


Figura 7.102 – VC3V-G42: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

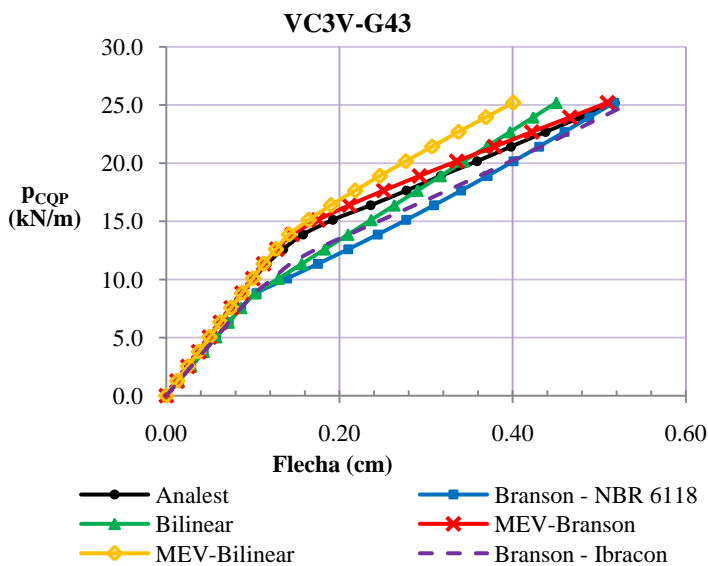


Figura 7.103 – VC3V-G43: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

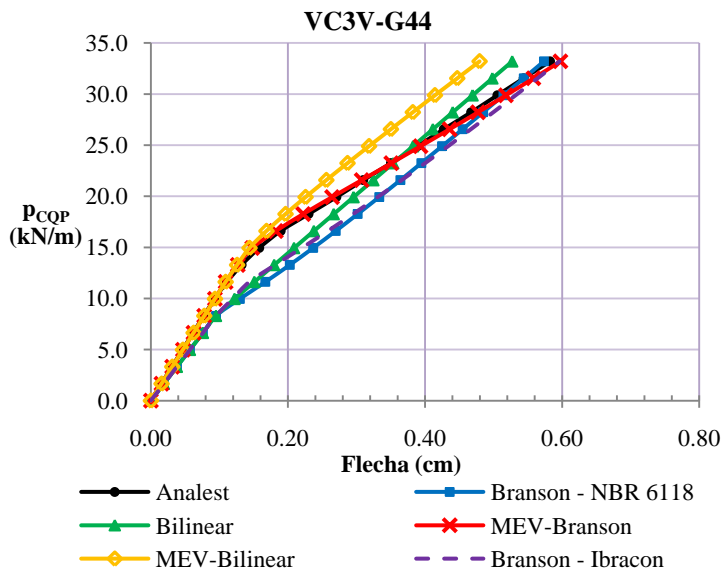


Figura 7.104 – VC3V-G44: gráfico carga aplicada versus flecha da seção central

Nas duas primeiras vigas os métodos simplificados Branson-NBR e Bilinear apresentaram na curva carga-flecha um valor de carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II, na seção analisada, inferior aos demais modelos, resultando em maiores valores de flecha final. O MEV-Branson teve problema de convergência na viga 2 (VC3V-G42) e por isso não está mostrado.

Para as vigas 3 e 4 do grupo, a curva carga-flecha obtida pelo MEV-Branson praticamente coincide com a do modelo do Analest, enquanto os outros modelos/métodos mostram uma rigidez maior no trecho pós-fissurado. A variação das flechas finais de viga para viga e de método para método pode ser visualizada na figura 7.106, e as diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest na tabela 7.46.

As flechas finais calculadas pelo MEV-Bilinear novamente foram as menores. Apesar de o cálculo pelo MEV-Branson não ter convergido para a segunda viga, nas demais vigas o modelo se aproximou bem dos resultados do Analest, obtendo a menor média de diferença para flecha final: 2%. A maior média foi apresentada pelo método Bilinear (18,6%) seguido pelo Branson-NBR (16,8%).

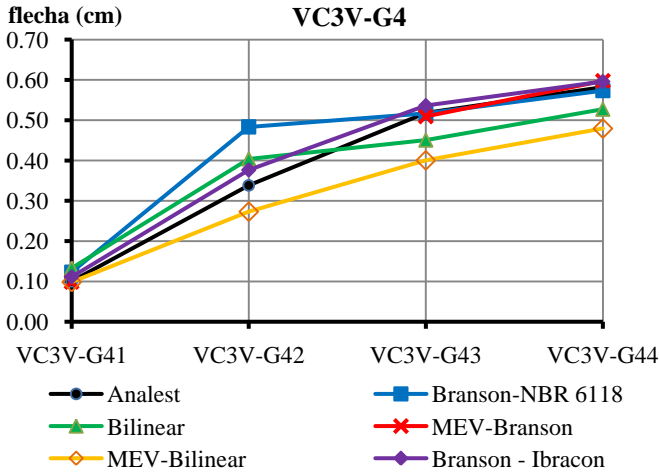


Figura 7.105 – Grupo VC3V-G4: resultados das flechas

Tabela 7.46 – Grupo VC3V-G4: diferença percentual das flechas finais em relação as do modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Branson Ibracon	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VC-G111	22.63	10.71	32.46	-1.91	-1.91
VC-G112	42.93	11.34	19.35	-	-19.23
VC-G113	-0.18	3.53	-13.02	-1.66	-22.67
VC-G114	-1.51	2.36	-9.46	2.63	-17.65
Média	16.81	6.99	18.57	2.07	15.36

7.4 Análise dos resultados das vigas de projeto

A análise dos resultados obtidos pelos diferentes métodos e modelos, assim como feita para as vigas biapoiadas, será feita primeiramente englobando todas as vigas pela comparação dos valores de flechas obtidos pelos diferentes métodos e modelos para a carga final de serviço, comentando-se também sobre o comportamento observado nas curvas carga-flecha. Em seguida a análise é feita separando as vigas por caso de carregamento e também separando as vigas contínuas de dois vãos e de três vãos.

Na tabela 7.47 estão as médias das diferenças percentuais das flechas calculadas para cada método/modelo em relação aos resultados do modelo do Analest. A tabela contém a média das diferenças percentuais negativas, ou seja, vigas que apresentaram flechas menores que as do Analest; a média das vigas com diferença percentual positiva; a Média 1, calculada com as diferenças percentuais em módulo (a mesma média calculada no estudo dos grupos), e também a Média 2, calculada com todos os resultados das diferenças percentuais considerando-se o sinal; além do desvio padrão mostrado na última coluna. A figura 7.107 ilustra a Média 1 das diferenças percentuais para melhor visualização.

Tabela 7.47 – Vigas contínuas: diferença percentual das flechas dos modelos estudados em relação as do modelo do Analest (%)

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-5.05	12	27.43	48	22.96	20.93	27.95
Branson-Ibracon	-6.16	8	12.11	52	11.32	9.68	11.26
Bilinear	-11.71	30	27.63	30	19.67	7.96	27.03
MEV - Branson	-9.44	43	5.82	15	8.50	-5.49	10.86
MEV - Bilinear	-17.99	59	3.75	1	17.75	-17.62	11.01

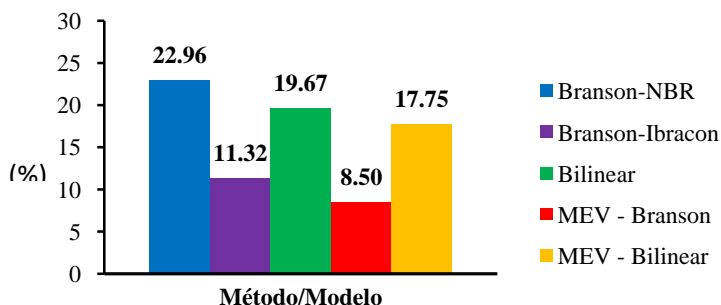


Figura 7.106 – Vigas contínuas: média das diferenças percentuais (média 1) dos modelos estudados em relação ao Analest

Analisando todos os resultados das flechas finais obtidos para as 60 vigas contínuas estudadas pelos diferentes modelos e métodos, verificou-se que o MEV-Branson apresentou valores que, em média, mais se aproximaram dos resultados do modelo do Analest, tanto pela

Média 1 (8,5%), quanto pela Média 2 (-5,5%). Pela análise dos gráficos carga versus flecha apresentados para cada viga, constatou-se que o modelo MEV-Branson foi o que mostrou comportamento mais similar em relação ao modelo do Analest, apresentando na curva carga-flecha não apenas o ponto de mudança do estágio I para estágio II geralmente coincidente, mas também a rigidez após a fissuração bastante semelhante, explicando-se assim a obtenção de valores finais das flechas mais próximos.

Pode-se afirmar que o modelo MEV-Branson apresentou resultados mais próximos do modelo do Analest do que os métodos simplificados que também utilizam a fórmula de Branson (Branson-NBR e Branson-Ibracon), devido ao fato de levar em consideração a variação da rigidez ao longo do vão, que ocorre devido à variação do nível de fissuração de acordo com a solicitação atuante e também com a taxa de armadura. Ressalta-se, também, que no modelo MEV-Branson foi adotado o expoente da fórmula de Branson como $m=4$ ao invés de $m=3$, de modo a desconsiderar que parte da viga está no estágio I de comportamento, já que calcula-se a rigidez para um elemento de pequena extensão, onde o elemento ou está todo fissurado ou está no estágio I, conforme já mencionado em 2.2.1 e 5.2.

O método simplificado Branson-Ibracon obteve Média 1 de 11,3% e Média 2 de 9,7%, com a maior parte das vigas com valores de flecha maiores que os obtidos pelo modelo do Analest (52 de 60), o que se explica pela carga de mudança do estágio I para o estágio II da seção analisada ser, em geral, um pouco menor que a do modelo do Analest, e a rigidez ser similar no trecho pós-fissuração, resultando, assim, em valores finais de flecha maiores. Como o Branson-Ibracon considera até 3 seções para o cálculo da rigidez de um vão, constatou-se, como era de se esperar, que este método se aproximou mais do modelo do Analest e do MEV-Branson do que o Branson-NBR, o qual obteve diferença percentual média bem maior, 23% pela Média 1 e 22% pela Média 2 e com o maior desvio padrão (23%), com a maioria dos valores também acima dos obtidos pelo modelo do Analest. Isto se explica pelo fato do Branson-NBR adotar somente uma seção para cálculo da rigidez, resultando em carga correspondente à mudança do estágio I para o II, na maioria das vigas, menor do que a do modelo do Analest e também do método Branson-Ibracon. Pode-se concluir então que o Método Branson-Ibracon, que utiliza até três valores de rigidez para um vão no caso das vigas contínuas, apresenta resultados bem melhores em comparação ao método original Branson-NBR.

O modelo refinado MEV-Bilinear apresentou uma variação percentual média de 17,75% pela Média 1 e -17,62% pela Média 2, com quase todos os valores abaixo dos obtidos pelo modelo do Analest. Isto se deve ao fato de, além de apresentar uma rigidez maior no trecho pós-fissuração da curva carga-flecha, o ponto de mudança do estágio I para o estágio II ter sido, na maioria dos casos, para uma carga um pouco maior. Já o método simplificado Bilinear, que utiliza somente um valor de rigidez para um vão, calculada para a seção mais solicitada, obteve média um pouco maior, 19,67% pela Média 1, mas com valores distribuídos, 30 vigas com flechas acima e 30 vigas com flechas abaixo dos valores do Analest, resultando numa Média 2 mais baixa, 8%, porém com um alto desvio padrão, 27%. Isto se deve ao fato de, apesar de o método Bilinear também apresentar rigidez maior após a fissuração em comparação ao modelo do Analest, a carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II é menor, similar à carga obtida pelo método Branson-NBR. Pode-se concluir então que, tendo como referência os resultados do modelo do Analest, entre os dois métodos seria mais recomendável adotar o método simplificado Bilinear do que o MEV-Bilinear, pois resulta em geral em valores maiores de flecha que o MEV-Bilinear, fornecendo assim resultados mais a favor da segurança. E, conforme já comentado no item 2.2.2 e na análise das vigas biapoiadas (item 6.3.7), está embutido no cálculo do coeficiente de ponderação ζ usado para a obtenção da rigidez pelo modelo, a consideração de que parte do vão da viga calculada está no estágio I de comportamento, o que não é adequado no caso do método refinado, já que se calcula a rigidez para um elemento de extensão reduzida.

Nas próximas figuras estão expostos os valores de diferença percentual da flecha calculada para cada viga por cada modelo/método em relação aos resultados do modelo do Analest, dispostos em função da maior taxa de armadura presente ao longo de cada viga.

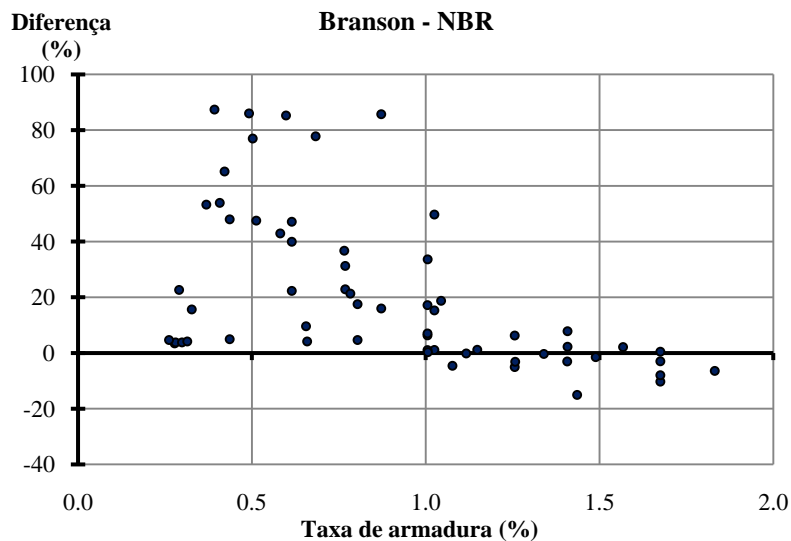


Figura 7.107 – Branson-NBR: diferença percentual - taxa de armadura

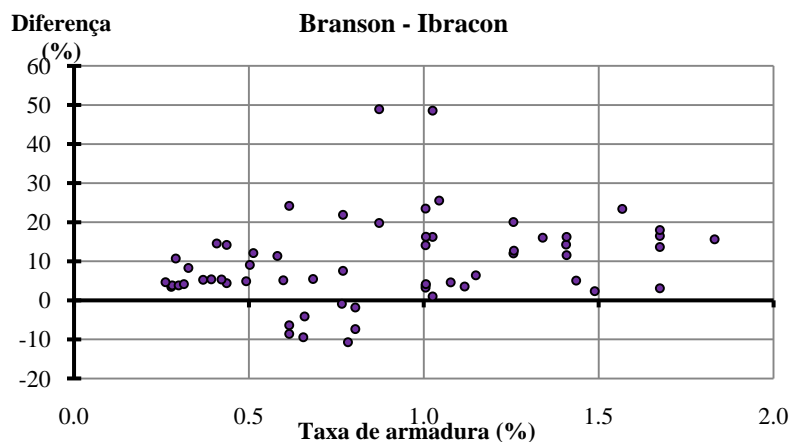


Figura 7.108 – Branson-Ibracon: diferença percentual - taxa de armadura

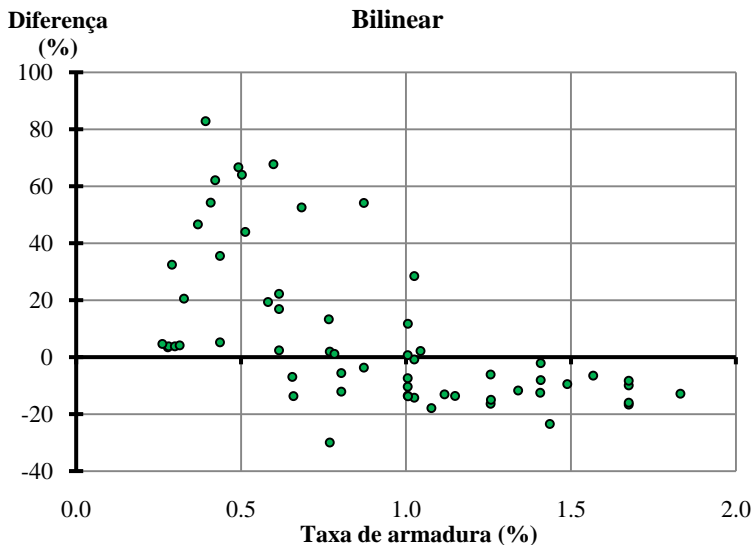


Figura 7.109 – Bilinear: diferença percentual - taxa de armadura

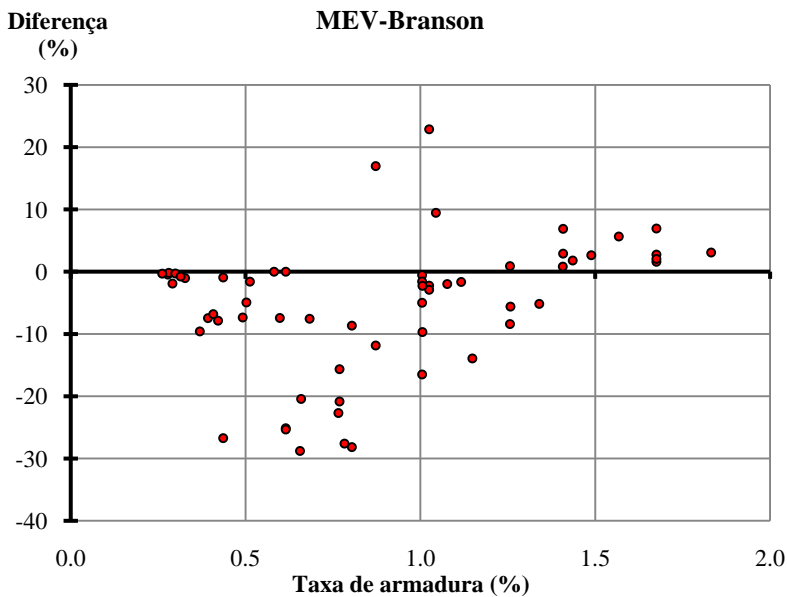


Figura 7.110 – MEV-Branson: diferença percentual - taxa de armadura

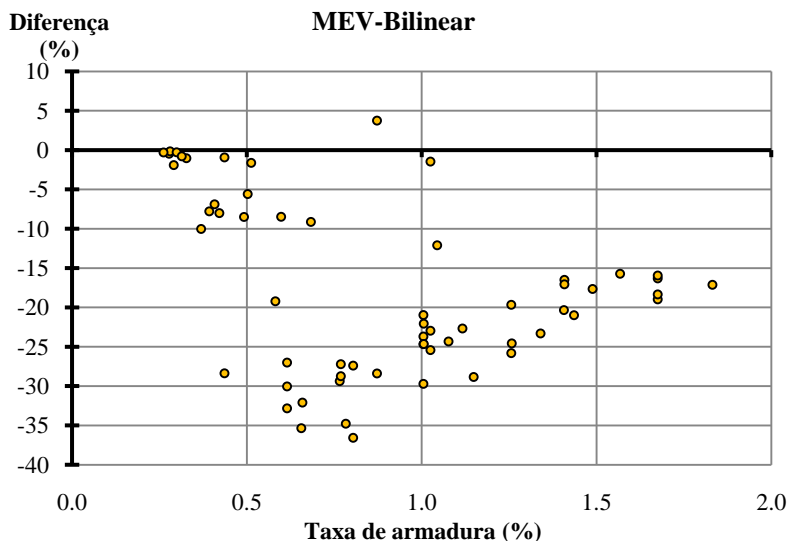


Figura 7.111 – MEV-Bilinear: diferença percentual - taxa de armadura

Analisando as diferenças percentuais de cada viga representadas por cada ponto nos gráficos mostrados em função da taxa de armadura, podem-se fazer algumas constatações sobre os resultados. Primeiramente, observou-se maior variabilidade das diferenças percentuais para taxas de armadura até 1%, com exceção do método Branson-Ibracon, que para taxas até 0,5% não apresentou grande variabilidade e acima deste valor mostrou dispersão dos resultados quase que constante em função do valor crescente da taxa de armadura. Para o método simplificado Branson-NBR, os resultados das flechas ficaram mais próximos dos do modelo do Analest para as taxas de armadura maiores que 1%, o mesmo ocorreu para o método Bilinear.

Para valores de taxa de armadura acima de 1%, as diferenças percentuais apresentam menos variação dentro de cada método/modelo, que pode se explicar devido ao fato das vigas com taxas de armaduras mais altas estarem submetidas a maiores valores de carregamento de serviço, estando bastante fissuradas, logo, nestas vigas a contribuição na rigidez do concreto fissurado e da extensão da viga no estágio I é pequena, diminuindo, então, a variabilidade dos resultados dentro de cada método/modelo.

As próximas figuras são similares às últimas apresentadas, com a diferença que os resultados das diferenças percentuais estarem agora expostos em função da porcentagem do vão fissurado de cada viga.

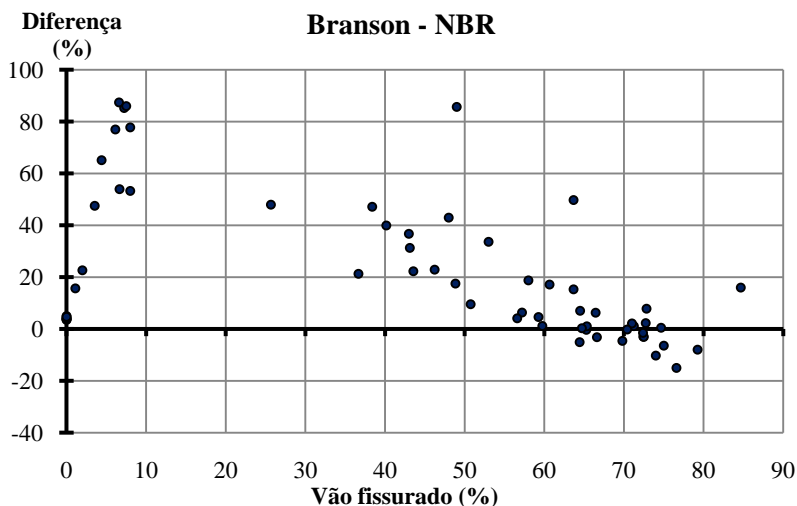


Figura 7.112 – Branson-NBR: diferença percentual - vão fissurado

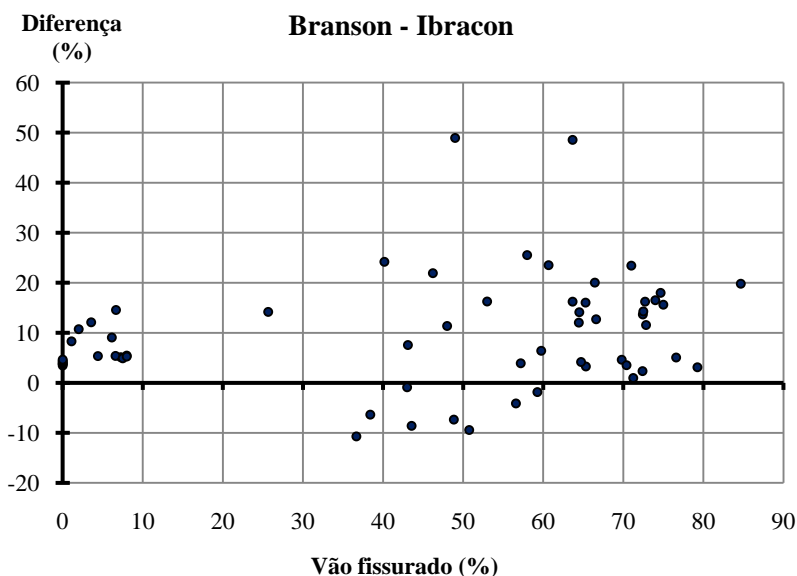


Figura 7.113 – Branson-Ibracon: diferença percentual - vão fissurado

Analisando os resultados do método Branson-NBR percebe-se a grande variabilidade dos resultados para vigas com menos de 60% de vão fissurado, apresentando desde diferenças percentuais pequenas até diferenças acima de 80%. As diferenças percentuais ficam menos dispersas e com valores menores, mas ainda com dispersão e valores de diferença consideráveis, para as vigas com mais de 65% do vão fissurado.

Da figura 7.114, observa-se que o método Branson-Ibracon mostrou que os resultados de diferença percentual em relação ao modelo do Analest foram menores que 20% para vigas com porcentagem do vão fissurado até 40%. Acima de 40%, os valores das diferenças percentuais apresentam maior variabilidade, diferente do que ocorreu para o Branson-NBR.

Para o método Bilinear, a distribuição dos resultados apresentou-se similar ao gráfico do método Branson-NBR, com valores bastante dispersos e variáveis para vigas com vão fissurado até 60%, como pode ser visto na figura 7.115.

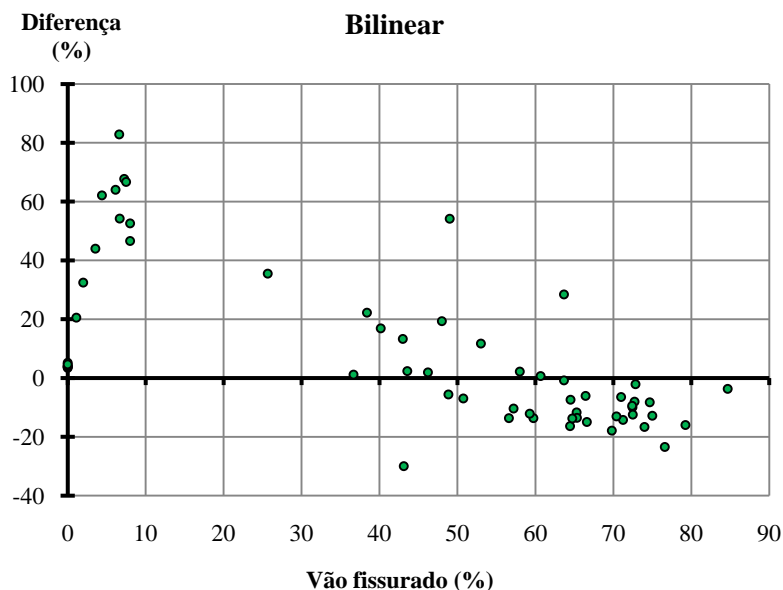


Figura 7.114 – Bilinear: diferença percentual – vão fissurado

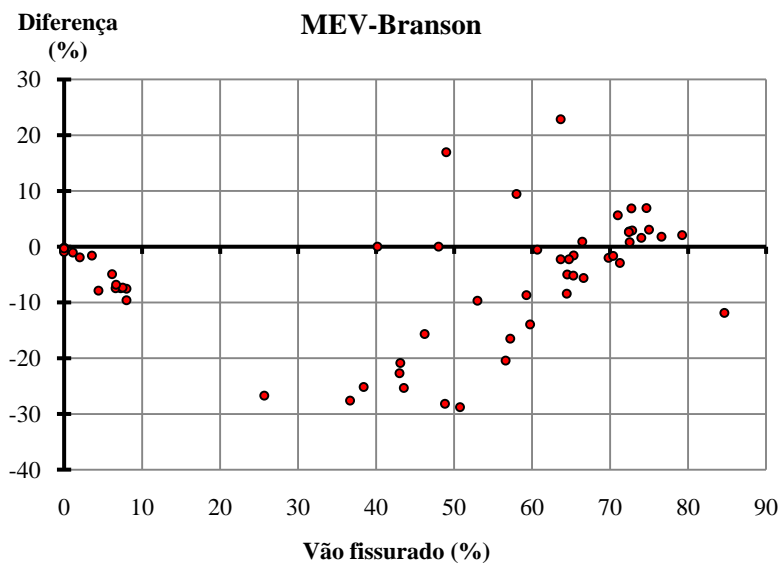


Figura 7.115 – MEV-Branson: diferença percentual – vão fissurado

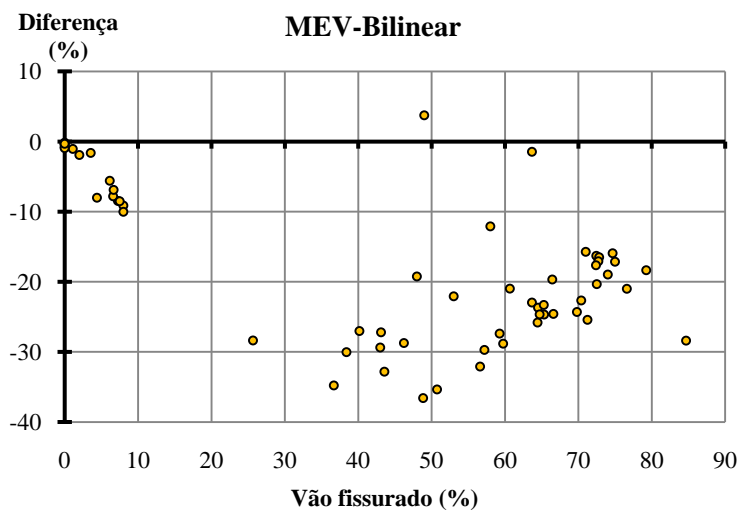


Figura 7.116 – MEV-Bilinear: diferença percentual – vão fissurado

Os resultados dos modelos do MEV-Branson e MEV-Bilinear apresentaram distribuição dos resultados similares. Para porcentagens de

vão fissurados menores que 10% os resultados se mantiveram com pequena diferença em relação aos do modelo do Analest, se mantiveram na faixa de variabilidade de 10%. Para valores entre 10% e 60% do vão fissurado, a dispersão dos valores foi maior, e acima de 60% as diferenças percentuais se mantiveram com valores mais próximos entre si dentro de cada modelo.

Na tabela 7.48 mostram-se os resultados das diferenças percentuais das flechas em relação às flechas calculadas pelo modelo do Analest de outra forma. Para cada método/modelo, é indicado o número de vigas que possuem diferença percentual nas faixas indicadas, $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$, e também a porcentagem do número total (60 vigas) que estas vigas representam.

Para o intervalo de $\pm 10\%$ de variação percentual o MEV-Branson apresentou 74% das vigas (43 vigas de 60 no total), e para o intervalo de $\pm 20\%$, 83% das vigas apresentaram diferença percentual menor que 20%, similar ao método Branson-Ibracon que apresentou 87% das vigas dentro deste intervalo, mas apenas 53% dentro do intervalo de $\pm 10\%$.

Tabela 7.48 – Distribuição das diferenças percentuais em relação ao modelo do Analest dentro dos intervalos de $\pm 20\%$ e $\pm 10\%$

Método/Modelo	$\pm 20\%$		$\pm 10\%$	
	(%)	nº vigas	(%)	nº vigas
Branson-NBR	63.33	38	50.00	30
Branson-Ibracon	86.67	52	53.33	32
Bilinear	73.33	44	38.33	23
MEV - Branson	82.76	48	74.14	43
MEV - Bilinear	51.67	31	30.00	18

7.4.1 Análise das vigas de dois vãos

Os resultados das vigas contínuas de dois vãos são agora analisados separadamente para os dois casos de carregamento estudados: carga distribuída e carga concentrada no meio do vão. As médias das diferenças percentuais das flechas calculadas pelos diferentes modelos/métodos em relação aos calculados pelo modelo do Analest estão apresentadas na tabela 7.49 para as vigas com carga distribuída, e na tabela 7.50 para as vigas com carga concentrada.

Tabela 7.49 Vigas de dois vãos com carga distribuída: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-6.22	9	37.80	23	28.91	25.42	34.39
Branson-Ibracon	-5.63	5	11.32	27	10.43	8.67	12.54
Bilinear	-14.35	17	38.82	15	25.82	10.57	32.95
MEV - Branson	-10.45	25	7.02	7	9.70	-6.62	11.48
MEV - Bilinear	-18.27	31	3.75	1	17.82	-17.58	11.76

Analisando o caso específico das vigas com carga distribuída, que no total somam 32 vigas, obteve-se a menor média para o modelo MEV-Branson, tanto pela Média 1 (9,7%) quanto pela Média 2 (-6,6%), também com o menor desvio padrão entre os métodos (11,5%). O método simplificado Branson-Ibracon também apresentou boa proximidade, já o Branson-NBR apresentou média alta e também desvio padrão alto, valores acima dos obtidos pela análise total das vigas. O método Bilinear também aumentou a Média 1 de 19,67% na análise total para 25,82%, com um desvio padrão alto de 33%. Já o MEV-Bilinear manteve aproximadamente a mesma média de diferença percentual em relação aos resultados do Analest.

Tabela 7.50 – Vigas de dois vão com carga concentrada: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-2.98	1	17.90	11	16.66	16.16	14.94
Branson-Ibracon	0.00	0	15.10	12	15.10	15.10	7.11
Bilinear	-4.51	5	11.93	7	8.84	5.08	12.97
MEV - Branson	-7.38	8	2.18	3	5.96	-4.77	9.35
MEV - Bilinear	-17.58	12	0.00	0	17.58	-17.58	11.09

Em relação à análise total e à análise das vigas com carga distribuída, as médias encontradas para as vigas de dois vãos com carga concentrada apresentaram valores significativamente diferentes. A menor média foi apresentada pelo MEV-Branson, com 5,96% de Média 1 e -4,77% de Média 2 de diferença percentual. Em seguida o método Bilinear, que para este caso mostrou resultados mais próximos do

Analest, com Média 1 de 8,84% e 5,08% de Média 2, com desvio padrão também bem menor do que no caso das vigas com carga distribuída, resultado bem abaixo do MEV-Bilinear que obteve média de 17,58%. Os métodos simplificados Branson-Ibracon e Branson-NBR obtiveram médias próximas, 16,66% e 15,10% respectivamente. Todos os métodos e modelos apresentaram médias menores que na análise total, com exceção do Branson-Ibracon, sendo a maior diferença obtida pelo método Bilinear. Apenas o MEV-Bilinear manteve aproximadamente o mesmo valor de média.

Na figura 7.118 estão os gráficos com as médias das diferenças percentuais (Média 1) separados por caso de carregamento, onde se pode visualizar melhor as diferenças encontradas.

Pode-se constatar que tanto para as vigas com carga distribuída como para vigas com carga concentrada o MEV-Branson apresentou os resultados mais próximos do modelo de referência e também os menos dispersos.

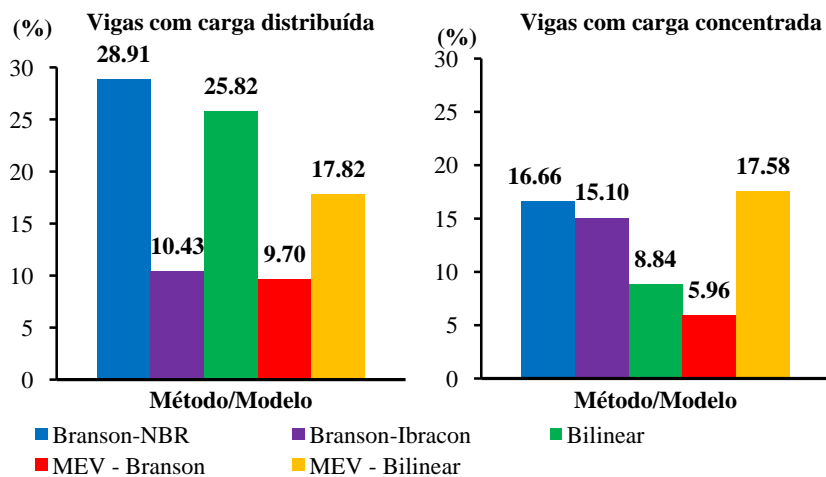


Figura 7.117 – Comparação das médias das diferenças percentuais (média 1) das vigas de dois vãos com carga distribuída e com carga concentrada

7.4.2 Análise das vigas de três vãos

Analogamente ao feito para as vigas de dois vãos, os resultados das flechas das 16 vigas contínuas submetidas à carga distribuída, calculadas pelos diferentes métodos e modelos, são comparados aos resultados obtidos pelo modelo do Analest. As médias das diferenças

percentuais estão na tabela 7.51 e na figura 7.120 está o gráfico com as médias calculadas com os valores em módulo.

Tabela 7.51 - Vigas de três vãos: diferenças percentuais médias em relação ao modelo do Analest

Método	Média (-)	nº vigas	Média (+)	nº vigas	Média 1	Média 2	Desvio Padrão
Branson-NBR	-0.85	2	17.89	14	15.76	15.55	19.29
Branson-Ibracon	-7.04	3	11.00	13	10.26	7.62	10.33
Bilinear	-10.58	8	20.38	8	15.48	4.90	21.82
MEV - Branson	-8.57	10	6.31	5	7.82	-3.61	10.89
MEV - Bilinear	-17.74	16	0.00	0	17.74	-17.74	10.02

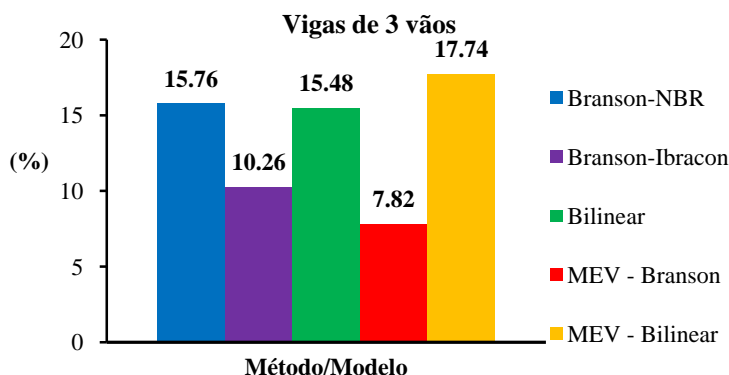


Figura 7.118 – Média 1 das diferenças percentuais das vigas de três vãos

Para as vigas de três vãos, as flechas obtidas pelo MEV-Branson apresentaram Média 1 de 7,82% e Média 2 de -3,61% de diferença em relação ao modelo do Analest, sendo o modelo que mais se aproximou do Analest nesta análise, seguido do método Branson-Ibracon com 10,26% de Média 1, valores similares encontrados na análise total. Os demais métodos mostraram médias menores que na análise total dos resultados, se aproximando mais, então, dos resultados do modelo do Analest, com exceção do MEV-Bilinear que manteve a diferença percentual média em torno de 17% como nas outras análises.

A análise dos resultados mostrou que o modelo MEV-Branson obteve os resultados que mais se aproximaram e também os menos

dispersos em relação aos do modelo do Analest. A aplicação da fórmula de Branson para consideração do efeito “tension stiffening” de forma simplificada, adotando somente uma seção para cálculo da rigidez do vão (Branson-NBR), não apresentou valores próximos aos do modelo refinado do Analest, ficando em média a diferença percentual em 23%; com média maior para vigas de dois vãos com carga distribuída. Já a aplicação da fórmula de Branson seguindo-se os comentários da NB-1 (Branson-Ibracon), que é o recomendado para vigas contínuas, apresentou resultados mais próximos, principalmente para as vigas com carga distribuída, inclusive relativamente próximos aos do modelo refinado que utiliza a fórmula de Branson (MEV-Branson).

O método Bilinear apresentou resultados próximos do modelo do Analest para o caso das vigas de dois vãos com carga concentrada, mas para as vigas com carga distribuída apresentou diferenças percentuais dos resultados e dispersão maiores. O MEV-Bilinear manteve o mesmo padrão de comportamento dos resultados.

Como já exposto anteriormente, duas vigas teóricas estudadas apresentaram problemas de convergência, a viga VC3VG42 e a VCG522, no cálculo pelo MEV-Branson. As vigas com resultados experimentais ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962), HH1 e HH2, também apresentaram problemas de convergência para o cálculo pelo MEV-Branson, e a viga HH1 apresentou, ainda, problemas de convergência para o MEV-Bilinear. A viga V1A-40 ensaiada por Cruz (1996) também apresentou problema de convergência para o MEV-Branson. Devido à limitação para desenvolvimento deste estudo que já se apresenta extenso, os problemas de convergência nos modelos de elementos de vigas implementados no AVSer não foram investigados.

Após a apresentação de todos os estudos realizados sobre flecha imediata de vigas contínuas neste capítulo, e tendo no capítulo anterior apresentado os estudos das vigas biapoiadas, no próximo capítulo são apresentadas as conclusões e recomendações finais sobre as análises dos resultados realizadas neste trabalho.

8. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo central avaliar os principais métodos simplificados recomendados por normas e alguns modelos refinados de cálculo de flechas imediatas de vigas de concreto armado, analisando tanto vigas biapoiadas, quanto vigas contínuas. Deu-se ênfase às vigas teóricas de projeto, comparando os valores das flechas obtidas para a carga de serviço, calculadas pelos diferentes métodos e modelos. Neste último capítulo são colocadas observações e as conclusões obtidas sobre os estudos realizados.

Em relação aos estudos realizados com vigas biapoiadas (capítulo 6), a comparação de resultados de flechas obtidos pelo modelo do Analest (MA) com os obtidos experimentalmente mostrou uma boa correlação, sendo assim o MA considerado adequado para ser usado como referência na comparação entre os resultados das flechas obtidas pelos diferentes métodos e modelos para as vigas de projeto estudadas.

Pelo estudo das vigas biapoiadas de projeto pode-se listar as conclusões descritas a seguir:

- Para taxas de armadura elevadas (maior que 1%) a contribuição do concreto fissurado e da parte da extensão do vão que está no estágio I na rigidez da viga é pequena;
- **MEV-Branson**: obteve os resultados das flechas finais (calculadas com a carga total de serviço) e também curvas carga-flecha mais próximos aos obtidos pelo MA pela análise total das vigas.
- **MEV-Bilinear**: foi o modelo que mais destoou dos demais, com flechas finais geralmente menores e rigidez no trecho pós-fissuração do concreto maior que dos demais modelos.
- **Branson-NBR**: o método simplificado recomendado pela NBR 6118 para o cálculo da flecha imediata mostrou flechas finais mais próximas do MA para as vigas com carga distribuída, mais próximos inclusive do que os do MEV-Branson.
- **Bilinear**: método simplificado para o qual se adotaram as propriedades do concreto e momento de fissuração conforme NBR 6118, mostrou resultados mais próximos do MA para as vigas com carga concentrada;

Em relação às vigas contínuas, o estudo comparativo entre os resultados dos modelos teóricos e resultados obtidos em ensaios ficou limitado devido à falta de vigas ensaiadas experimentalmente. Quanto ao

estudo das vigas de projeto, estão expostas a seguir as conclusões e recomendações extraídas da análise dos resultados feita no capítulo 7.

- **MEV-Branson:** obteve em média os resultados mais próximos aos valores obtidos pelo MA e também curvas carga-flecha mais semelhantes às do MA.
- **MEV-Bilinear:** obteve em média diferença percentual de 17,75% em relação ao MA, com valores de flecha predominantemente inferiores aos valores do MA e rigidez maior no trecho pós-fissuração.
- **Branson-NBR:** valores de flecha final bastante dispersos e geralmente maiores que os do MA, principalmente para as vigas contínuas de dois vãos com carga distribuída, com carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II consideravelmente menor que a obtida pelo MA.
- **Branson-Ibracon:** apresentou resultados das flechas finais razoavelmente próximos aos do MA, com diferença média de 11,3% (média de valores em módulo), similar à média encontrada para o Branson-NBR para as vigas biapoiadas (9,15%), apresentando diferença menor para o caso de vigas com carga distribuída.
- **Bilinear:** apresentou resultados de flecha final distantes dos obtidos pelo MA, com carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II consideravelmente menor que os outros modelos, similarmente ao método Branson-NBR, porém, com rigidez maior no trecho pós-fissuração.

Concluindo, em relação aos modelos refinados estudados, o modelo do Analest (MA) é o mais completo e foi o que apresentou melhor correlação em relação a resultados experimentais de vigas biapoiadas e contínuas de concreto armado, sendo assim recomendada sua utilização para o cálculo de flechas imediatas. No entanto, o MEV-Branson (com expoente $m=4$) é mais fácil de ser implementado computacionalmente e foi o que apresentou resultados mais próximos aos do MA, sendo assim recomendado também para o cálculo de flechas imediatas, tanto de vigas contínuas como de vigas biapoiadas de concreto armado. Não se recomenda a utilização do MEV-Bilinear, pois não forneceu bons resultados.

Com relação aos métodos simplificados, pode-se concluir que o método simplificado mais adequado para vigas contínuas de concreto armado é o Branson-Ibracon, pois apresentou precisão satisfatória em relação ao modelo de referência, MA. Já os métodos Branson-NBR e Bilinear, em que a rigidez equivalente de um vão é calculada adotando-se somente uma seção de referência, não forneceram bons resultados e não são portanto recomendados para vigas contínuas. Para vigas biapoiadas de concreto armado, os métodos simplificados Branson-NBR e o Bilinear mostraram precisão satisfatória em relação ao modelo de referência, MA, recomendando-se o Branson-NBR para vigas com carga distribuída e o Bilinear para vigas com carga concentrada.

A análise das flechas em função da taxa de armadura, tanto para as vigas contínuas como para as biapoiadas, mostrou que para vigas com baixa taxa de armadura, que são também as que possuem menor extensão do vão fissurado, os resultados dos métodos e modelos estudados são bastante dispersos em relação aos do MA, principalmente para os métodos simplificados, que em geral fornecem resultados bem acima dos modelos refinados, enquanto que, para taxas mais elevadas, em média acima de 1%, a variabilidade das diferenças percentuais das flechas finais em relação às calculadas pelo modelo do Analest diminuem.

A diferença percentual das flechas finais calculadas pelo método simplificado Branson-NBR, adotado também pelo ACI, em relação ao modelo tomado como referência, ficou dentro da faixa de diferença percentual encontradas por outros autores que compararam os resultados teóricos deste método a resultados de flechas obtidas em ensaios experimentais, como mencionado no item 2.3. Para as vigas biapoiadas, 85% das flechas calculadas por este método ficaram no intervalo de $\pm 20\%$ de diferença em relação aos resultados do MA; e para as vigas contínuas calculadas pelo método Branson-Ibracon, 87% das vigas ficaram dentro deste intervalo de $\pm 20\%$, resultados semelhantes aos encontrados por Diaz (2008) e Branson (1968).

Devido à limitação de tempo disponível para o desenvolvimento deste trabalho, o número de vigas teóricas estudadas foi menor do que o inicialmente desejado, no total foram 100 vigas de projeto, mas pelo comportamento similar das variações das flechas dos modelos, de grupo para grupo dentro dos casos estudados, pode-se dizer que o número de vigas analisadas foi suficiente para dar credibilidade às conclusões obtidas.

O desenvolvimento do programa computacional AVSer pela autora deste trabalho possibilitou o cálculo das flechas das vigas

estudadas pelos diferentes métodos de forma eficiente e de interface amigável para os usuários. Fica disponível, assim, uma ferramenta que pode ser utilizada tanto para fins acadêmicos como para a utilização por engenheiros projetistas para análise elástico-linear de vigas e/ou obtenção de esforços e flechas imediatas em situação de serviço pelos diferentes métodos implementados no programa.

Fica a sugestão para trabalhos futuros o estudo de cálculo de flecha diferida no tempo, tanto para os modelos refinados como para os métodos simplificados, podendo-se tomar como base para implementação computacional tanto o programa AVSer como o Analest.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05). Detroit, 2005.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 435 – Deflection of Concrete Flexural Members. ACI Journal, Proceedings, V. 63, Nº 6, June 1966, pag. 637-674.

ARAÚJO, J. M. Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, n. 5, p. 1-10, Agosto, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 12655**: Concreto-Preparo, controle e recebimento. Rio de Janeiro, 1996.

BRANSON, D. E. Design procedures for computing deflections. **ACI Journal**, September, 1968.

BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. HPR Report, Nº 7, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, 1963.

CHAN, E. C. **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams**. Berkeley, 1982. 361 f. PhD Thesis (Structural Engineering and Structural Mechanics) - University of California.

CHIMELLO, A. A. **Análise não linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC**. Florianópolis, 2003. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Design manual on cracking and deformations, Bulletin d'Informtion No. 185-E**. Paris, France, 1985.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. London, Thomas Telford, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Structural Concrete** – Textbook on Behavior, Design and Performance, Volume 2: Basis of Design. 1999.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3.ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1989.

CRUZ, A. C. **Capacidade de redistribuição de esforços em viga**. Rio de Janeiro, 1996. 113f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

D'ÁVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 2003. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

DÍAZ, L. Análisis comparativo de deformaciones experimentales en vigas de hormigón armado versus valores teóricos según procedimiento Del Código ACI 318-2005 y Método Propuesto. In: XXXIII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INCENIERIA ESTRUCTURAL, 2008, Santiago, **Anais...** Santiago:2008.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of concrete structures: General rules and rules for buildings**. Brussels-Belgium, 1992.

FERNANDES, S. A. **Análise das deformações do concreto e do comportamento de vigas submetidas à flexão simples**. São Carlos, 1996. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

GAMINO, A. L. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP**. São Paulo, 2007. Tese de Doutorado, Escola Politécnica - Universidade de São Paulo.

GHALI, A. Deflection of reinforced concrete members: a critical review. **ACI Structural Journal**. V. 90, N. 4, July-August 1993.

GHALI, A.; AZARNEJAD, A. Deflection prediction of members of any concrete strength. **ACI Structural Journal**. V. 96, N. 5, September 1968.

GHALI, A.; FRAVE, R.; ELDBADRY, M. **Concrete Structures: Stresses and Deformation**. 3. ed. London: Spon Press, 2002.

GUPTA, A.; MAESTRINI, S. R. Tension-stiffness model for reinforced concrete bars. **Journal of Structural Engineering (ASCE)**, v. 116, n. 3, p. 769-791, 1990.

IBRACON. **Comentários técnicos e exemplos de aplicação da NB-1: NBR 6118:2003 projeto de estruturas de concreto-Procedimento**. São Paulo: IBRACON, 2007.

LA ROVERE, H. L. **Nonlinear analysis of reinforced concrete masonry walls under simulated seismic loadings**. San Diego, 1990. Ph.D. Dissertation (Structural Engineering) - University of California.

LA ROVERE, H. L. **Notas de aula: Análise matricial de estruturas – ECV 4303, PPGEC/CTC/UFSC**, Florianópolis, 2009.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: Princípios Básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Vol. 1. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização**. Vol. 4. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1971.

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula: Tópicos especiais – elaboração de programas para análise e projeto de estruturas – ECV 4100, PPGEC/CTC/UFSC**, Florianópolis, 2009.

MACHADO, M. G. **Estudo experimental Ductilidade de Vigas em Concreto Armado Reforçadas à Flexão Utilizando Compósitos com Tecido de Fibras de Carbono**. Rio de Janeiro, 2004. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

MARI, A. R. **Nonlinear geometric, material and time dependent**

analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames. Berkeley, 1984. Report n. UCB/SESM – 84/12 – Department of Civil Engineering, University of California.

MATSUI, R. M.; SILVA, M. C. A. T. A consideração da não-linearidade física no cálculo de flechas em vigas de concreto armado. In: XXXII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INCENIERIA ESTRUCTURAL, 2006, Campinas, **Anais...** Campinas: 2006.

PEREIRA, J. S. **Modelo não linear de viga para obtenção de esforços em serviço aplicado a lajes de barragem de enrocamento com face de concreto.** Florianópolis, 2009. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.

SABNIS, G. M.; et al. Deflections of continuous concrete beams. **ACI Journal**. December, 1973.

SILVA, A. O. B.; ARAUZ, A. C.; RODRIGUES, F. M. Estudo comparativo dos métodos de verificação da flecha em vigas de concreto armado. In: XXXII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INCENIERIA ESTRUCTURAL, 2006, Campinas, **Anais...** Campinas: 2006.

SORIANO, H.L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** São Paulo: Ed. Edusp, 2003.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado.** Florianópolis, 2007. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. **Engineering Structures**. V. 30, p. 2069-2080, 2008.

ANEXO A

Detalhamento das armaduras das vigas teóricas

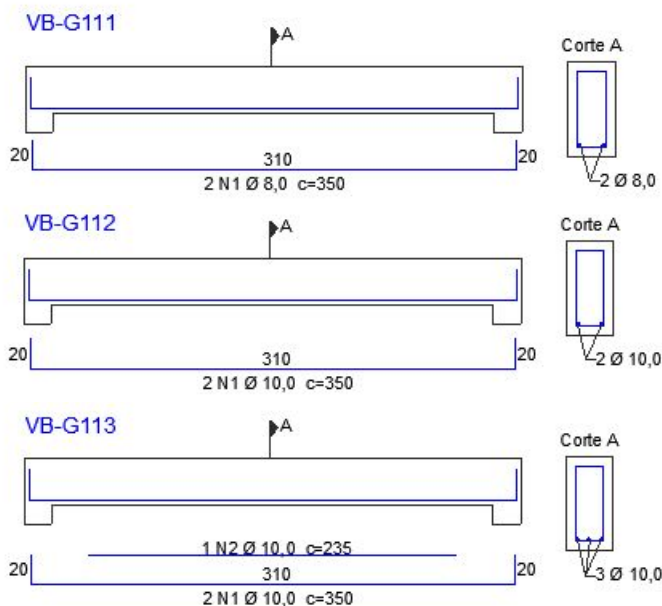
Neste anexo estão expostos as figuras com o detalhamento das armaduras longitudinais das vigas de projeto estudadas no capítulo 6 e no capítulo 7, separadas em seus respectivos grupos e subgrupos. São primeiramente mostrados os detalhamentos das vigas biapoiadas no item a seguir, e no item A.2 estão as vigas contínuas. Como já mencionado, foi detalhada somente a armação longitudinal, que interessava aos estudos, as armaduras de cisalhamento não foram detalhadas, assim como as armaduras construtivas.

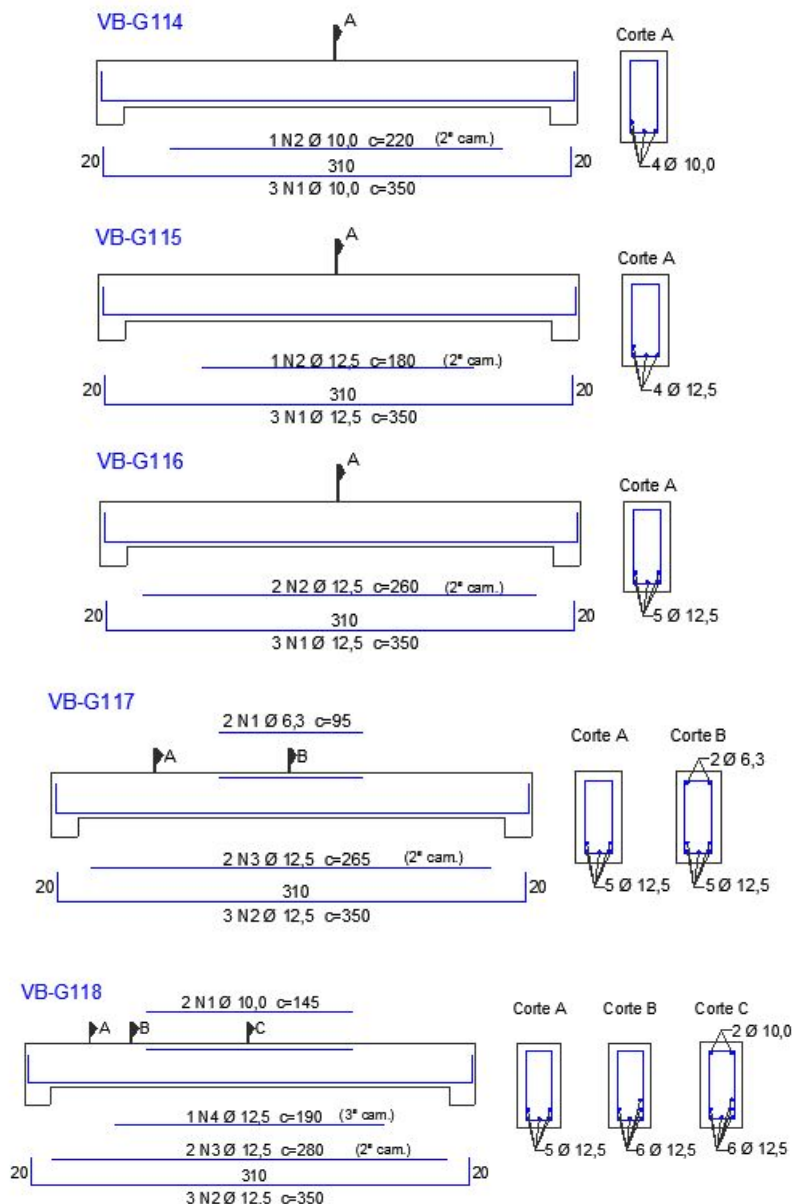
A.1 Detalhamento das armaduras das vigas biapoiadas

As figuras com os detalhamentos das armaduras longitudinais dimensionadas para a combinação no ELU das vigas biapoiadas estão dispostas a seguir, separadas em seus respectivos grupos e subgrupos.

A.1.1 Grupo VB-G1

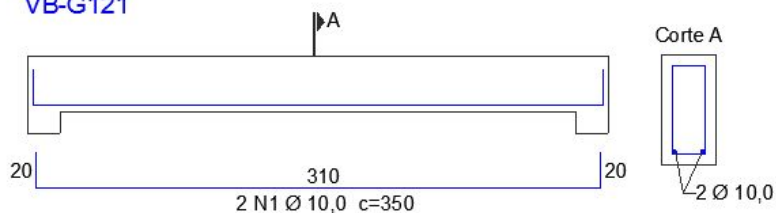
- Subgrupo VB-G11:



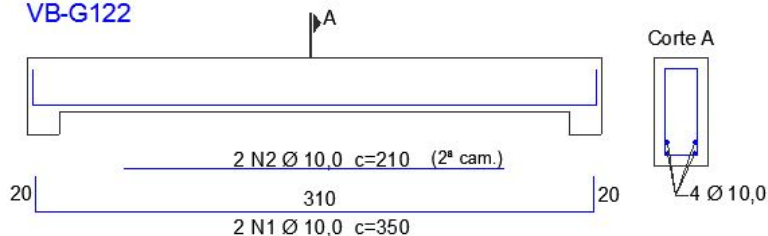


- Subgrupo VB-G12:

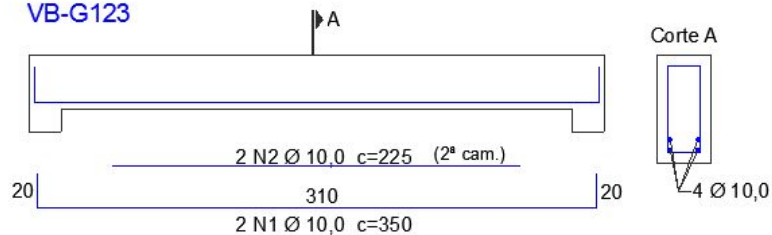
VB-G121



VB-G122



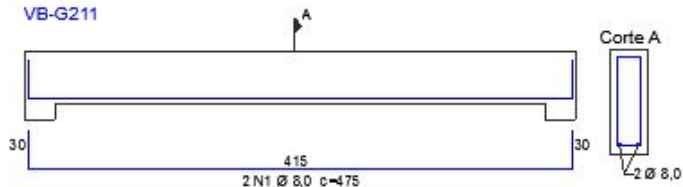
VB-G123

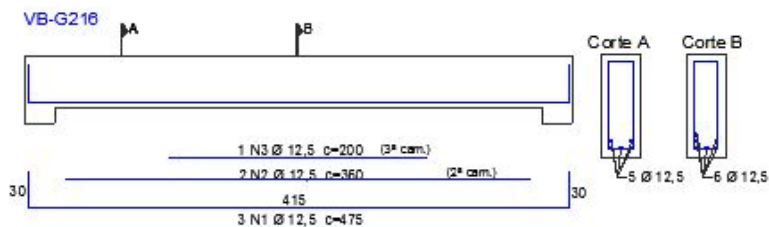
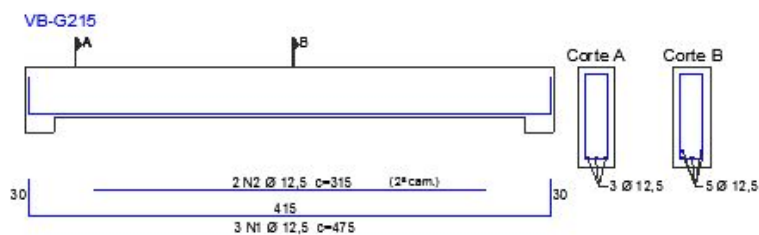
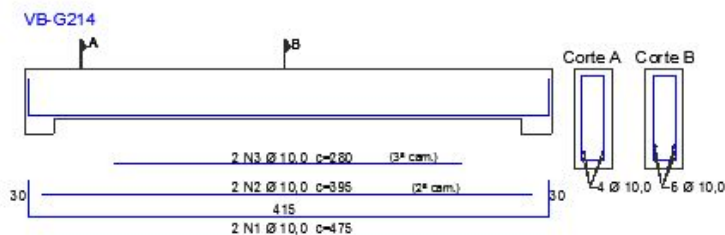
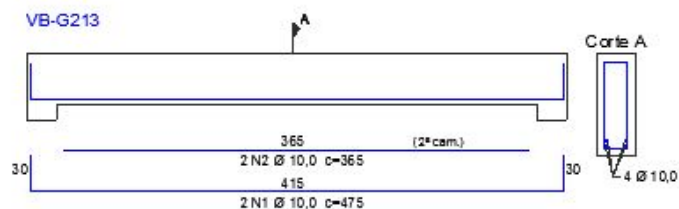
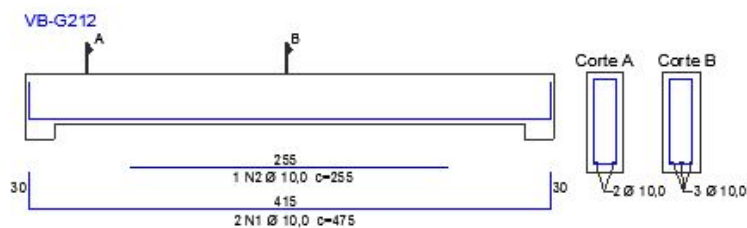


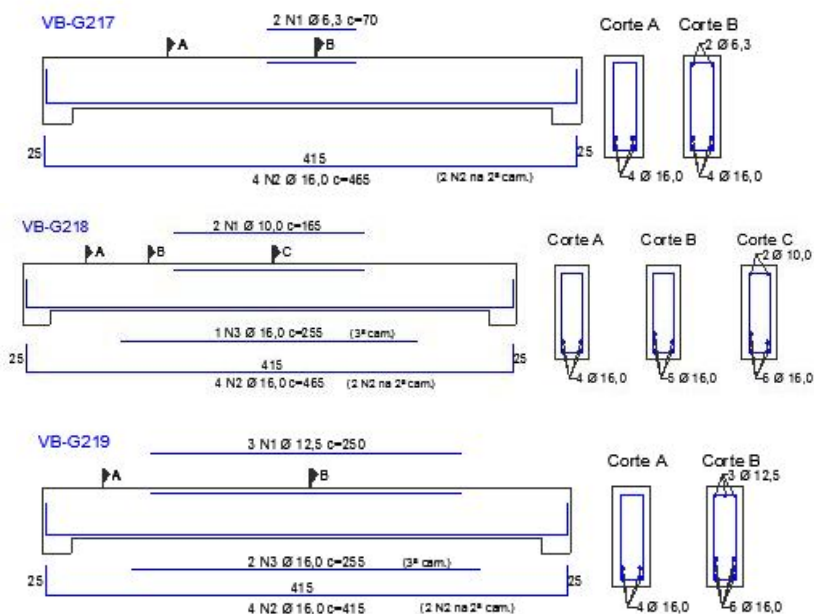
A.1.2 Grupo VB-G2

- Subgrupo VB-G21:

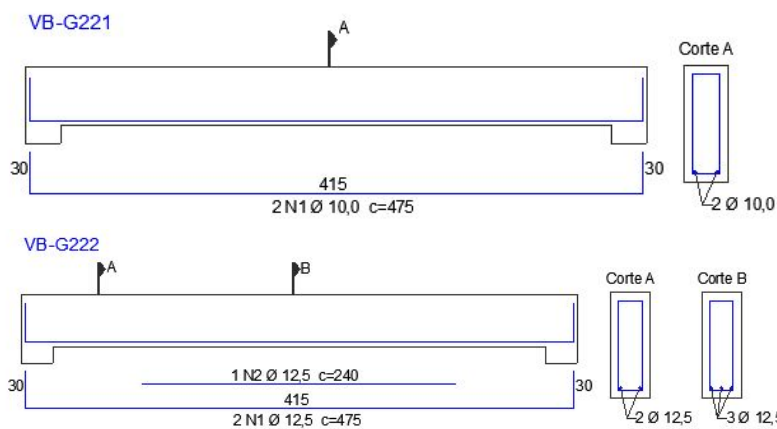
VB-G211

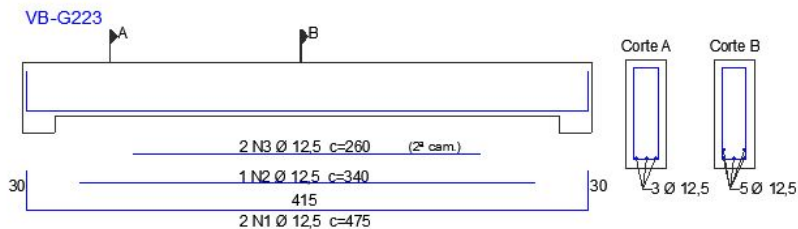






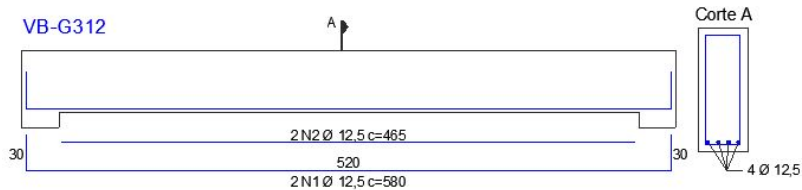
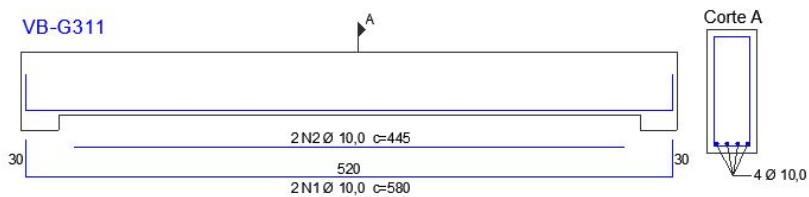
- Subgrupo VB-G22:



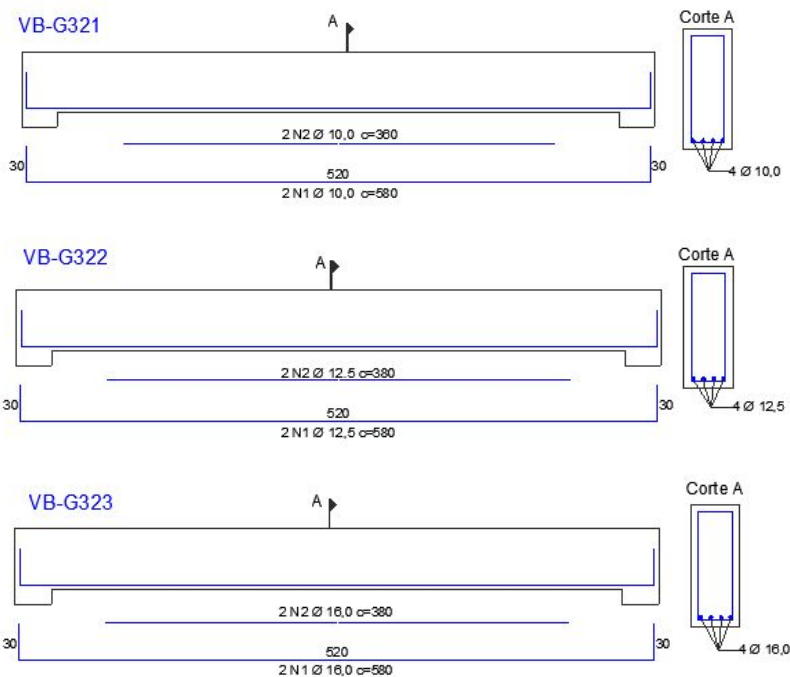


A.1.3 Grupo VB-G3

- Subgrupo VB-G31:

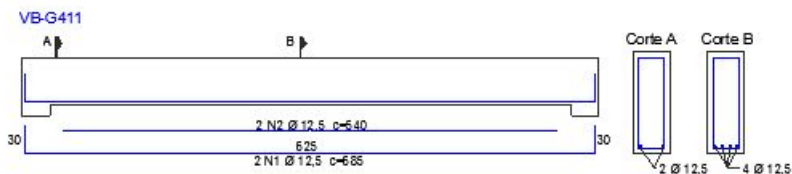


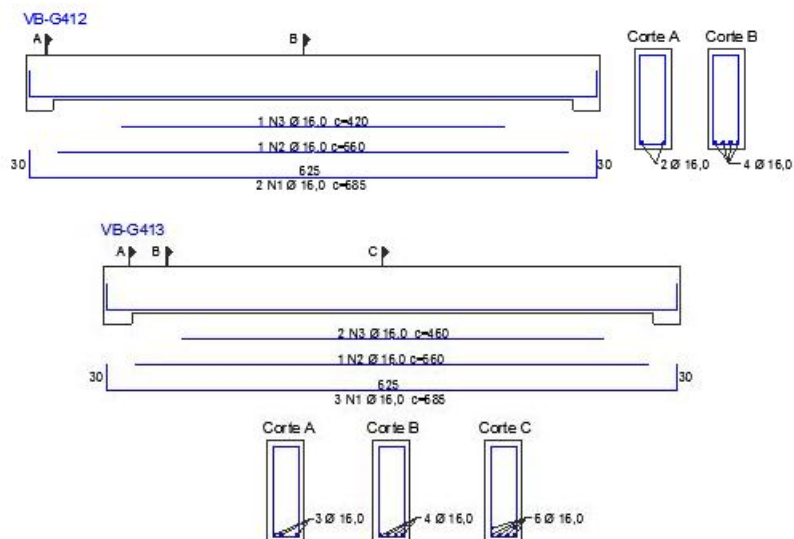
- Subgrupo VB-G32:



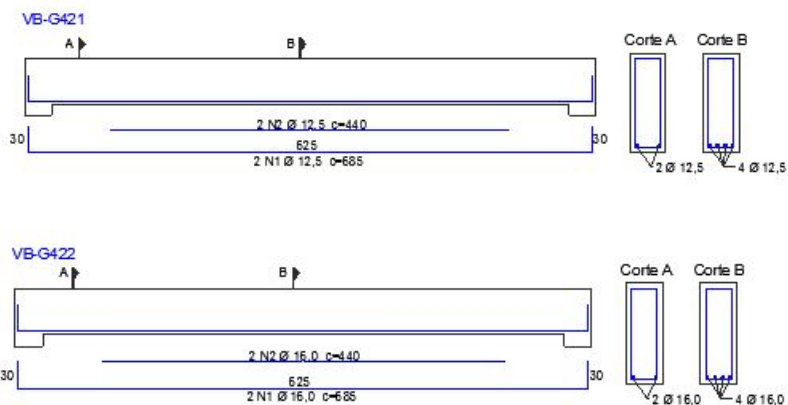
A.1.4 Grupo VB-G4

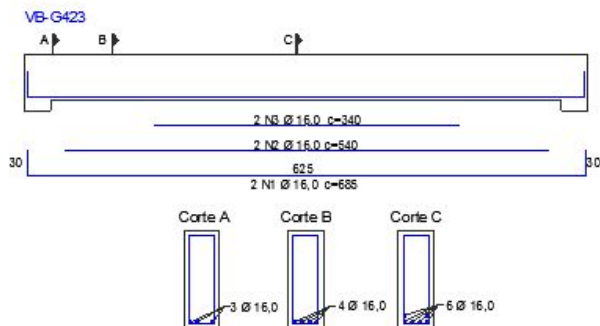
- Subgrupo VB-G41:





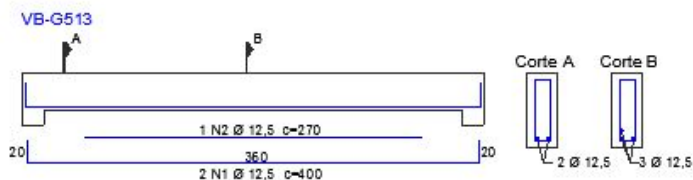
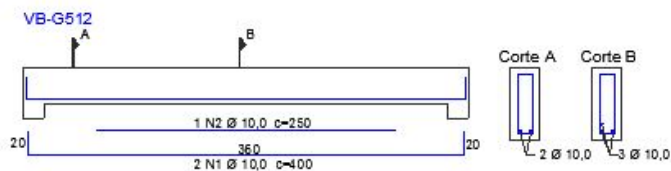
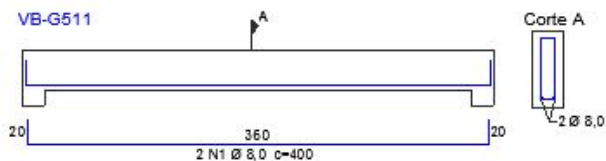
- Subgrupo VB-G42:



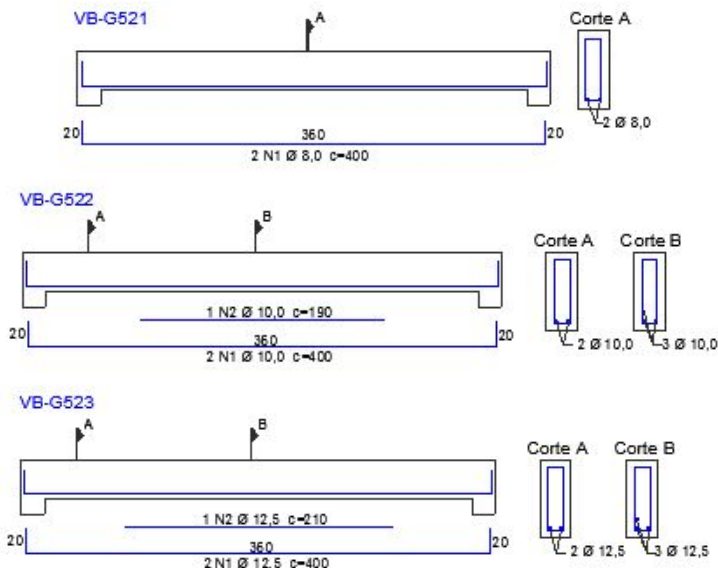


A.1.5 Grupo VB-G5

- Subgrupo VB-G51:



- Subgrupo VB-G52:

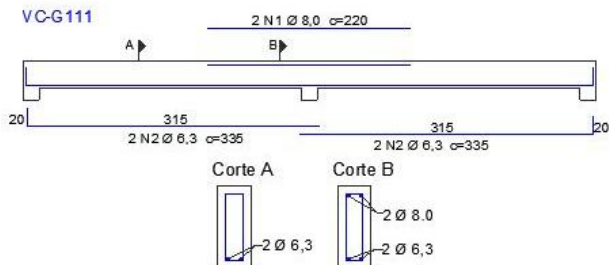


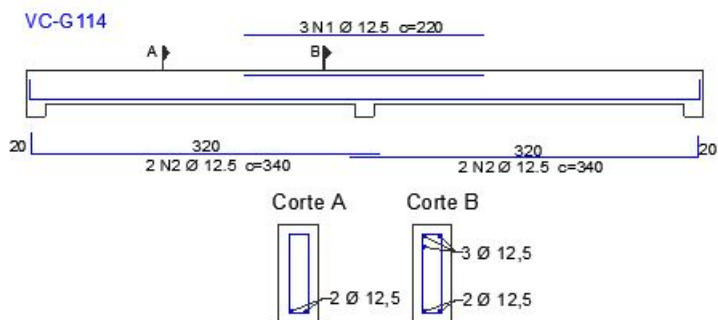
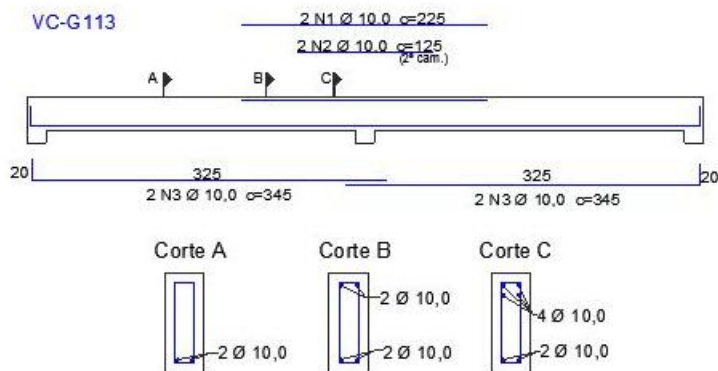
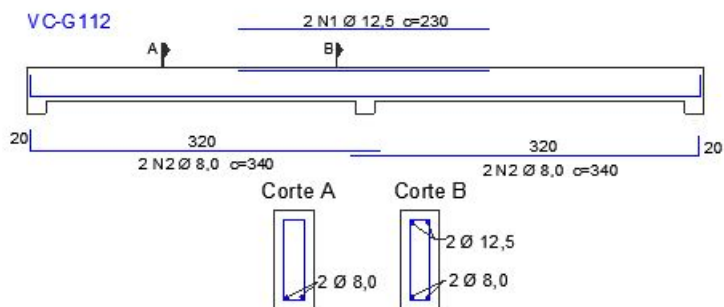
A.2 Detalhamento das armaduras das vigas contínuas

A seguir estão o detalhamento das vigas contínuas de projeto estudadas no capítulo 7 separadas em seus respectivos grupos e subgrupos.

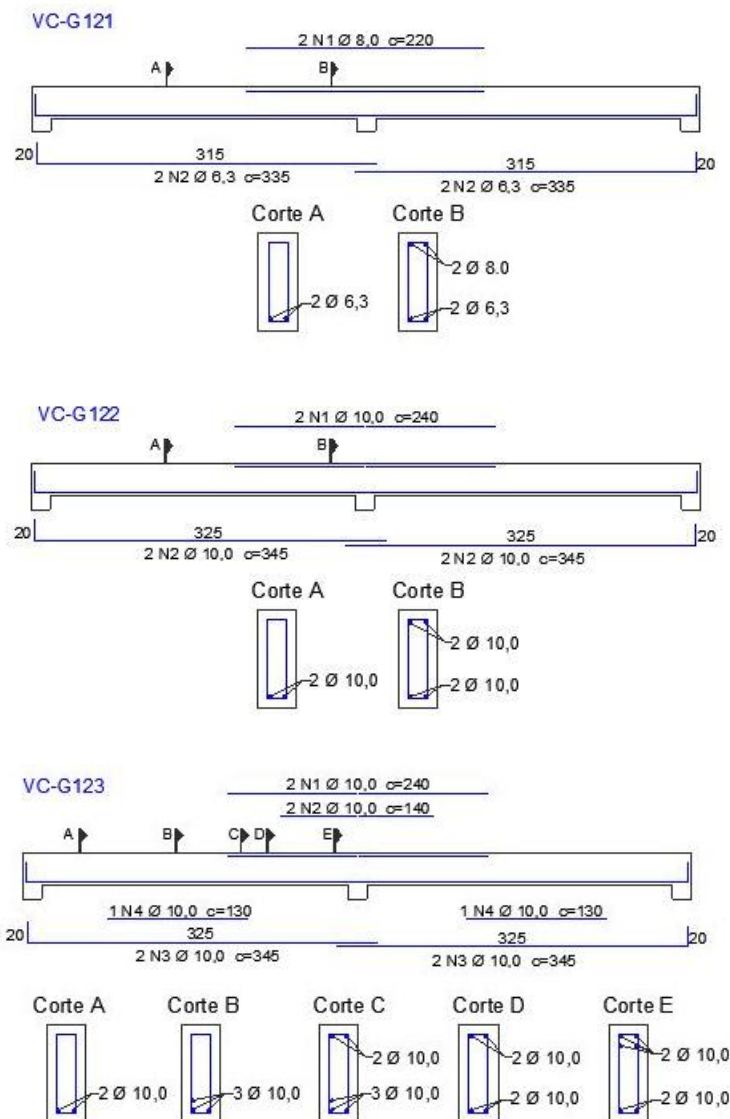
A.2.1 Grupo VC-G1

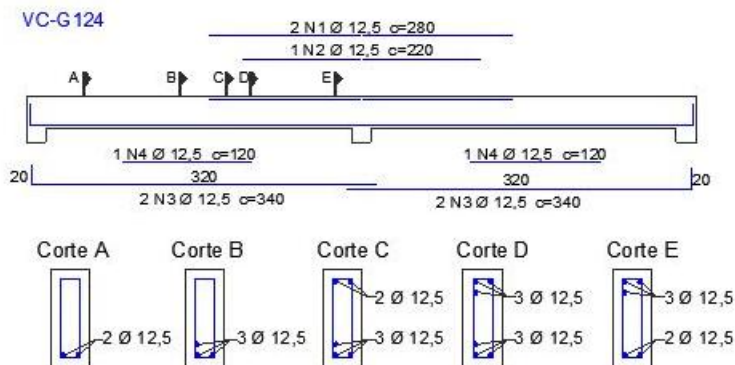
- Subgrupo VC-G11:



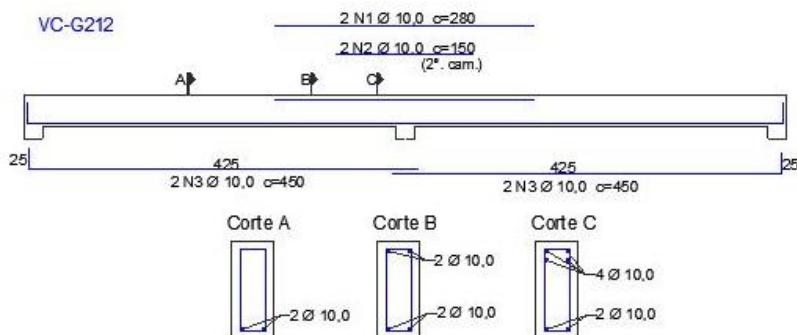
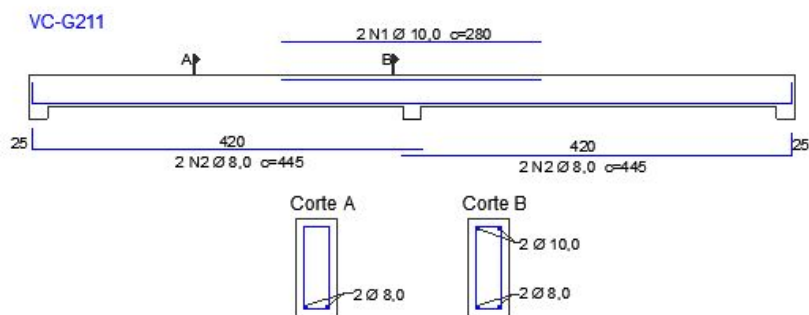


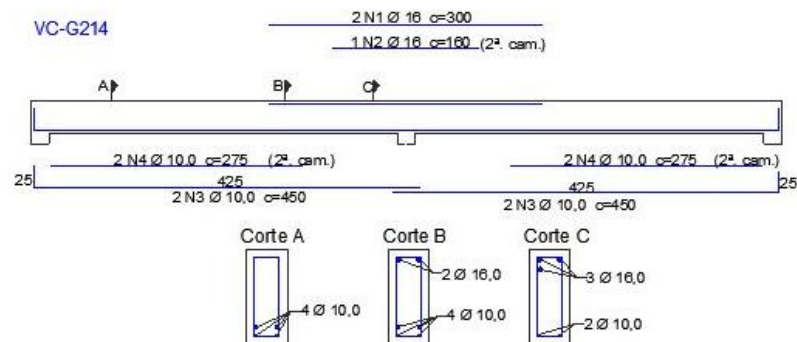
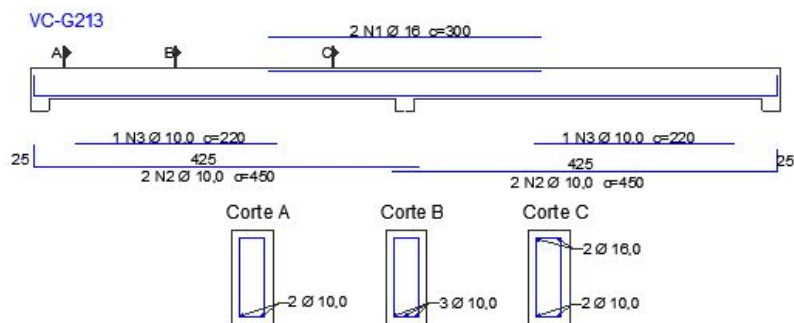
- Subgrupo VC-G12:





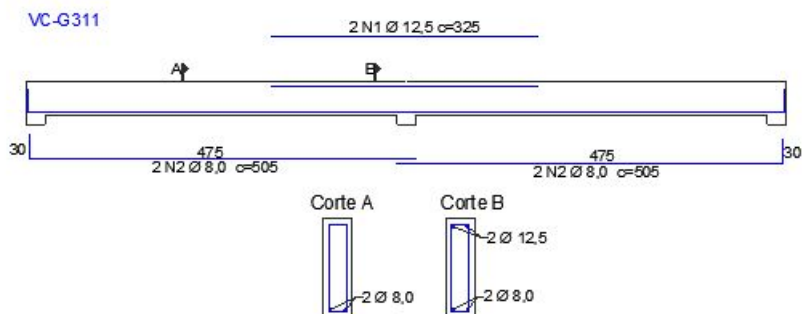
A.2.2 Grupo VC-G2

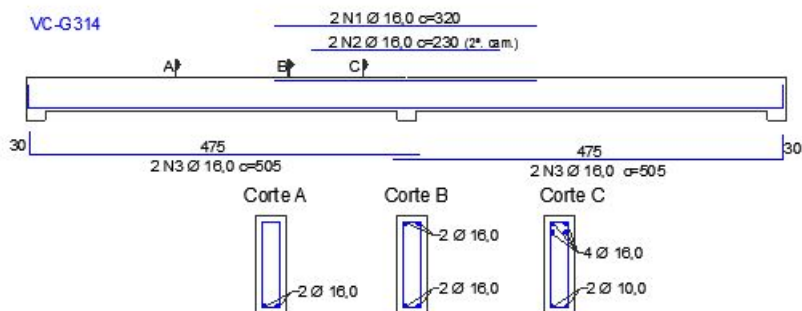
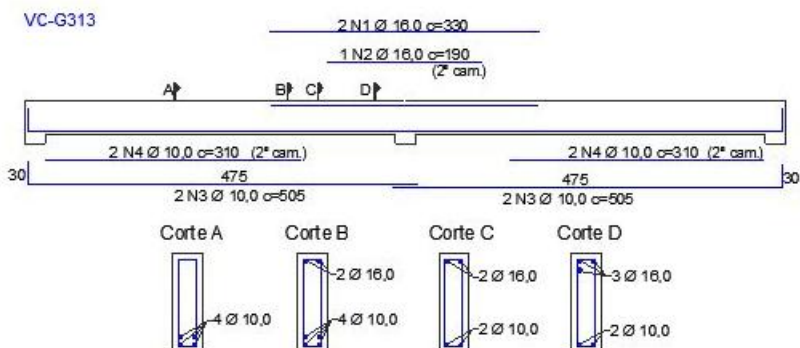
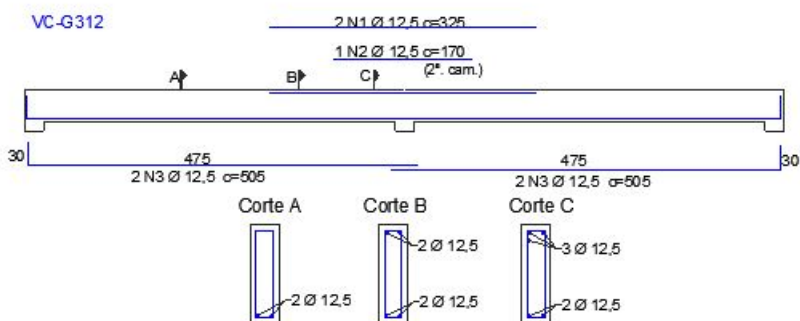




A.2.3 Grupo VC-G3

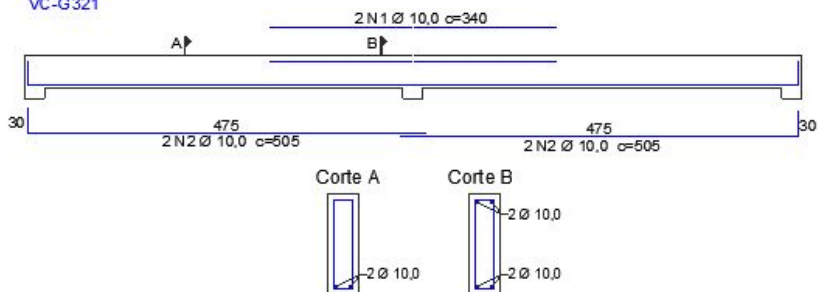
- Subgrupo VC-G31:



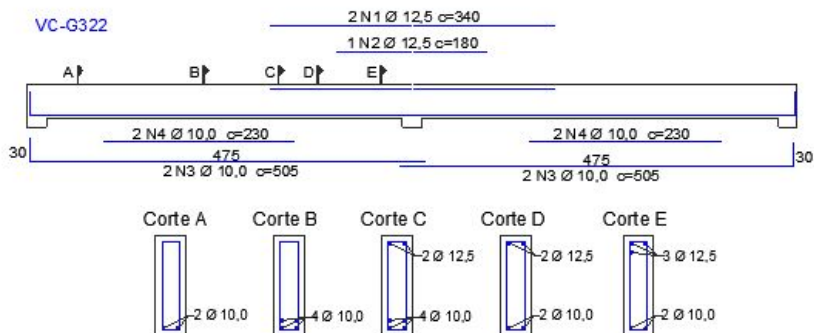


- Subgrupo VC-G32:

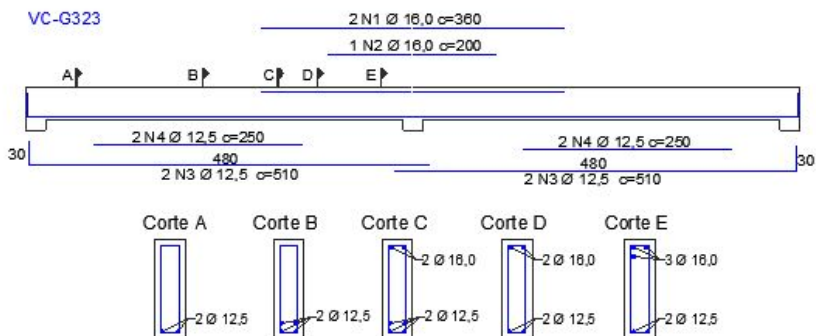
VC-G321

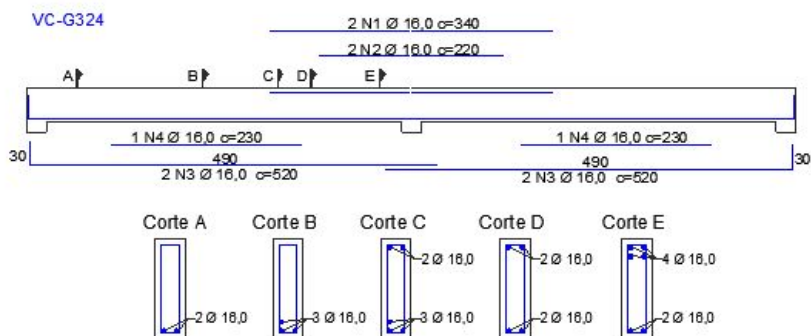


VC-G322

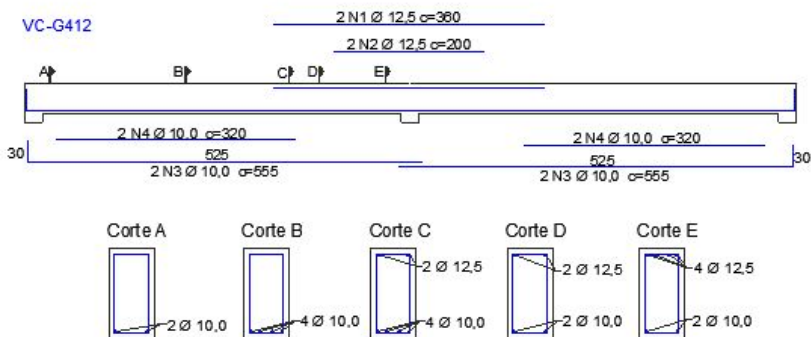
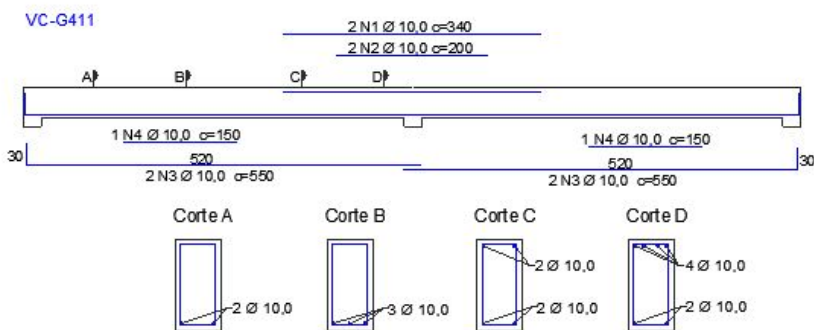


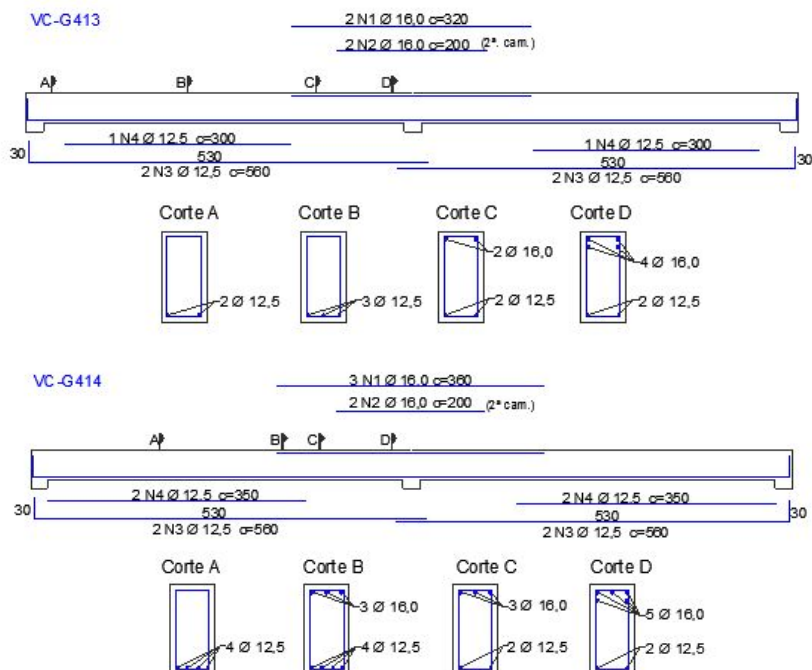
VC-G323





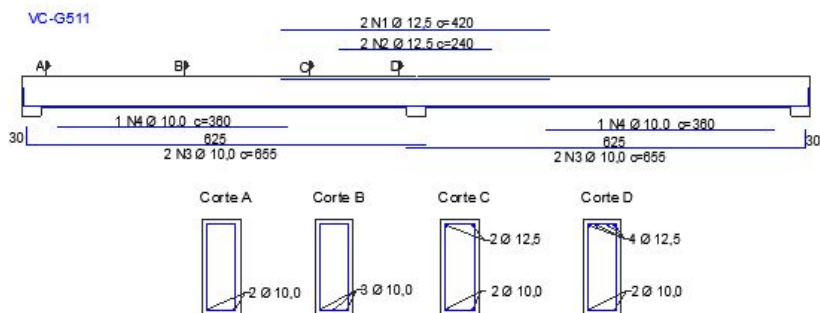
A.2.4 Grupo VC-G4

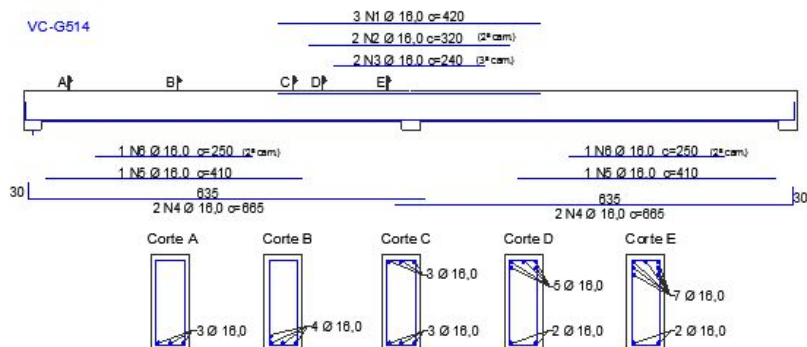
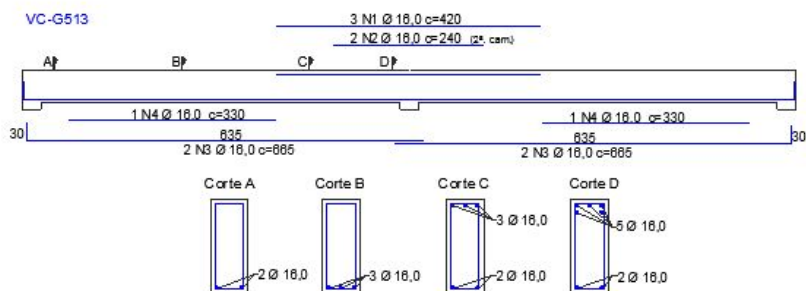
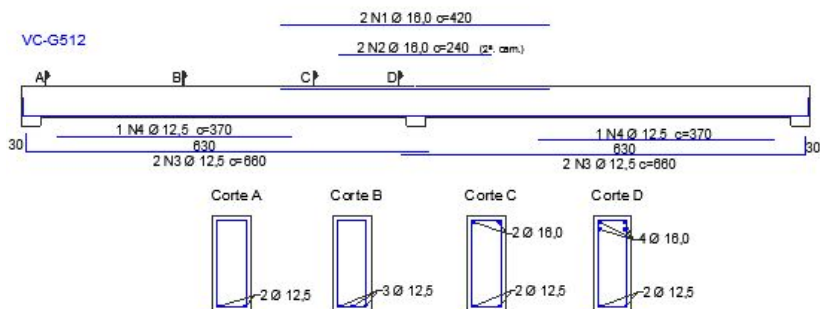




A.2.5 Grupo VC-G5

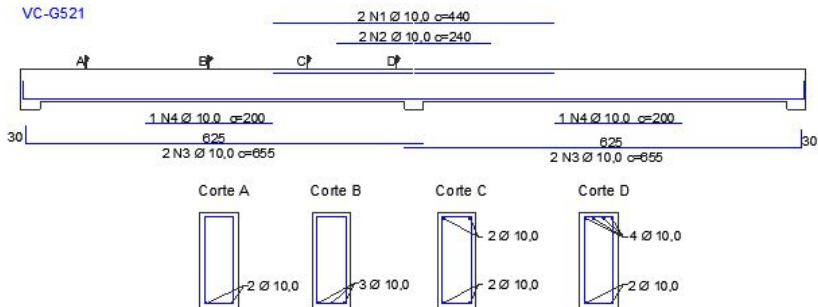
- Subgrupo VC-G51:



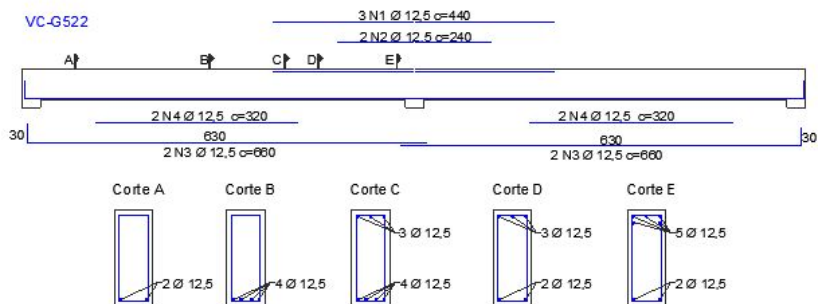


- Subgrupo VC-G52:

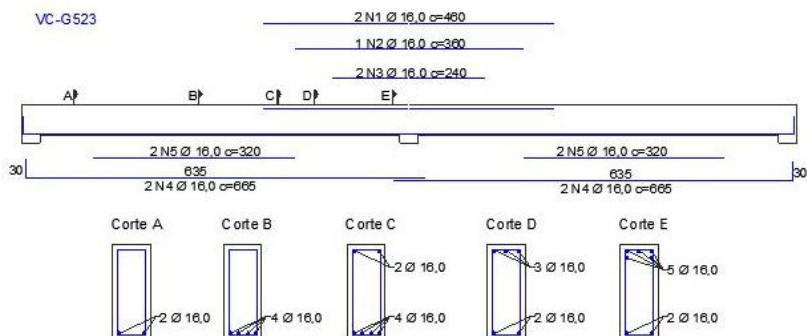
VC-G521

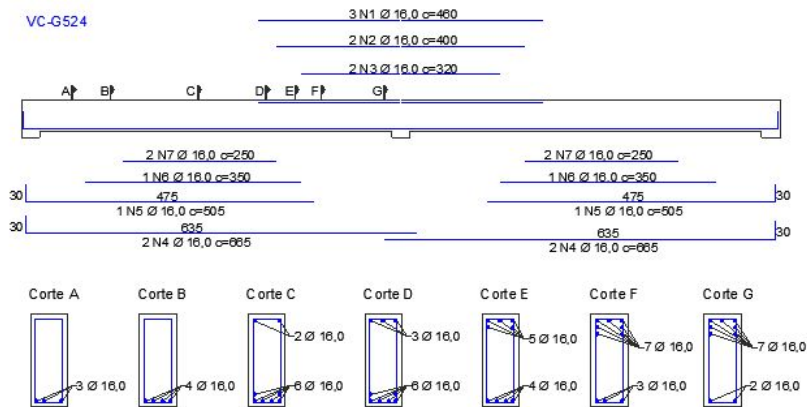


VC-G522

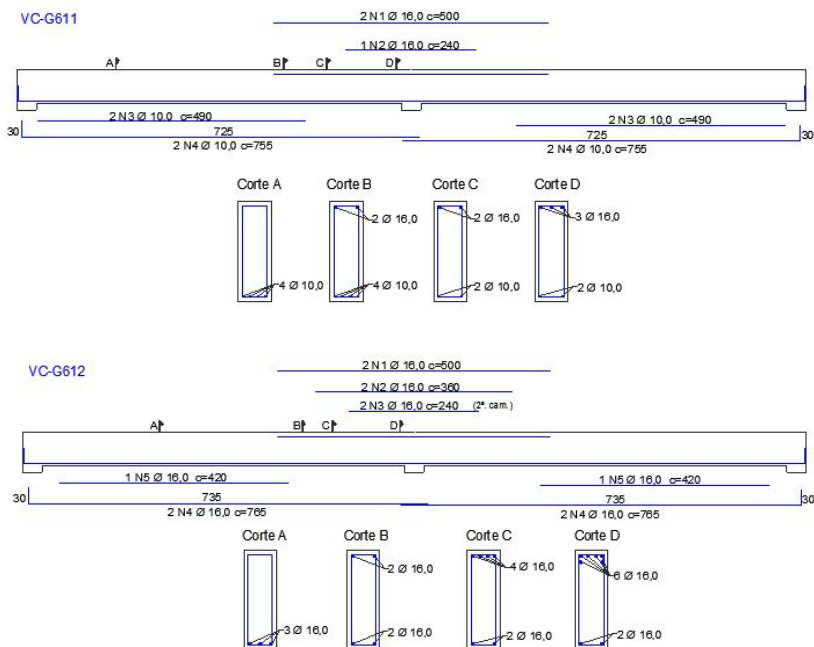


VC-G523

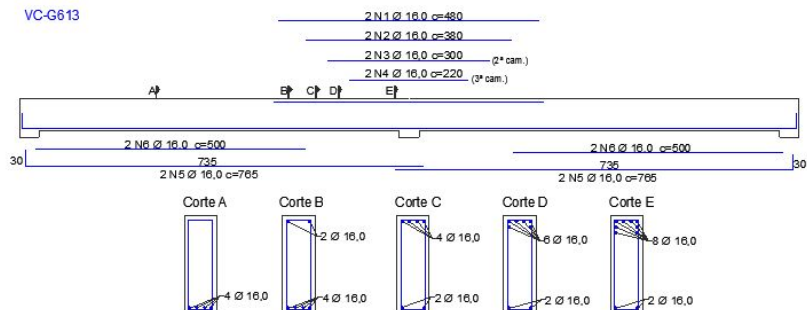




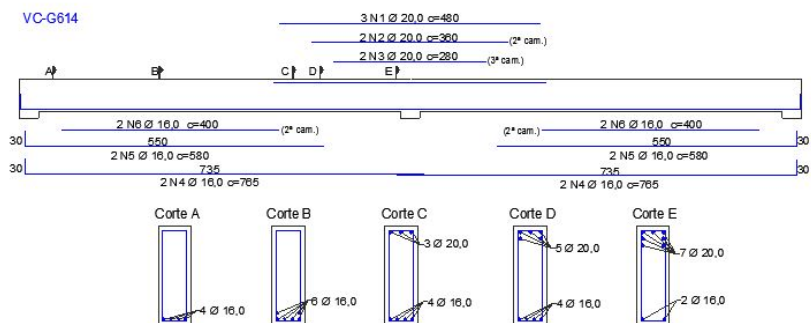
A.2.6 Grupo VC-G6



VC-G613

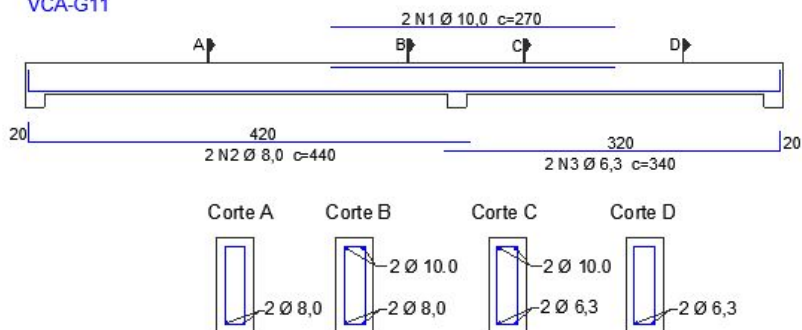


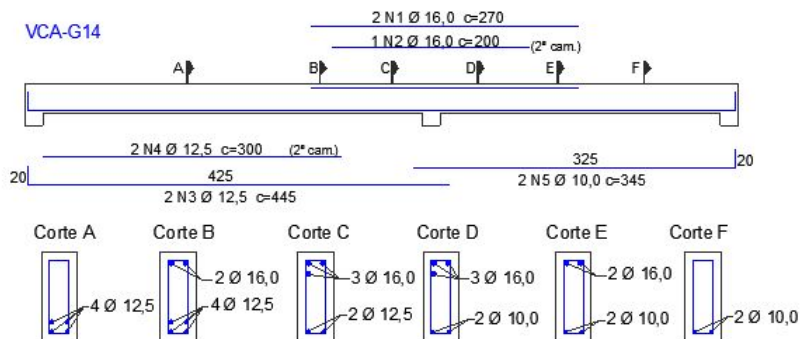
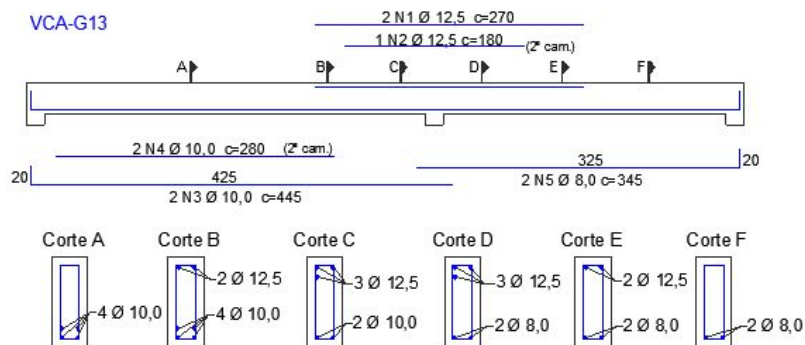
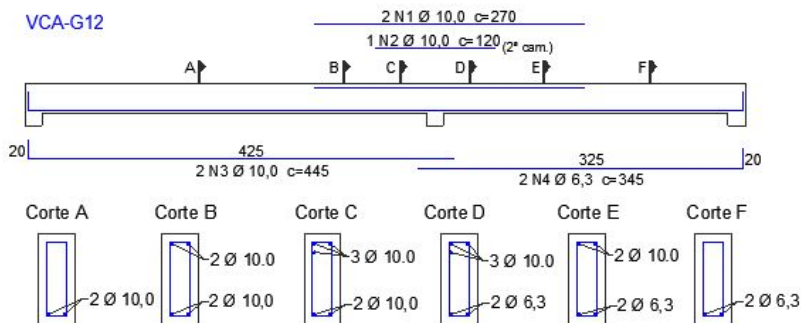
VC-G614



A.2.7 Grupo VCA-G1

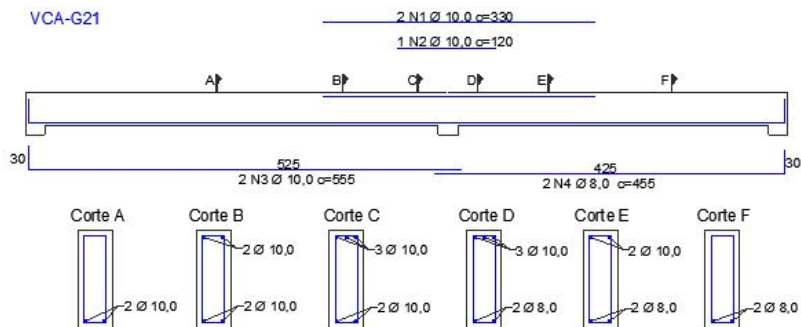
VCA-G11



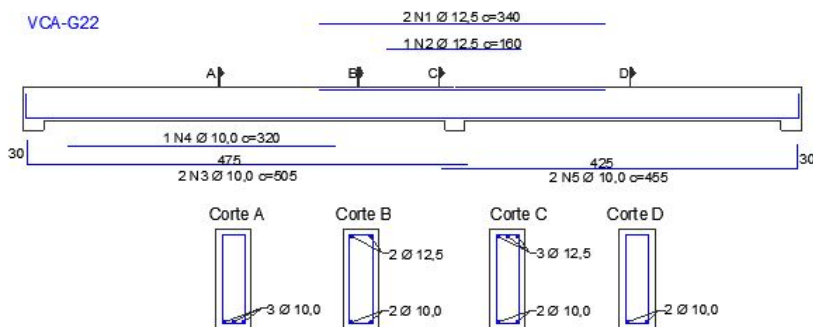


A.2.8 Grupo VCA-G2

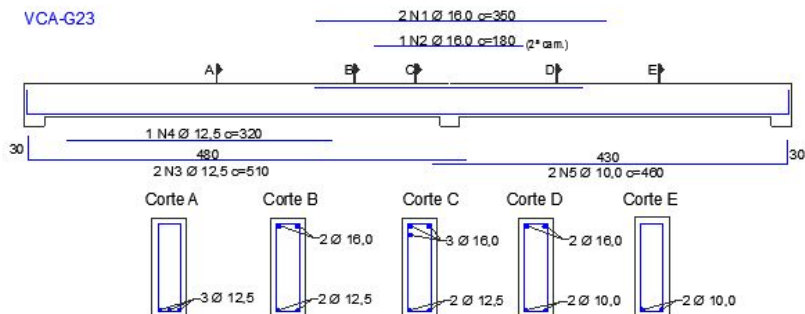
VCA-G21

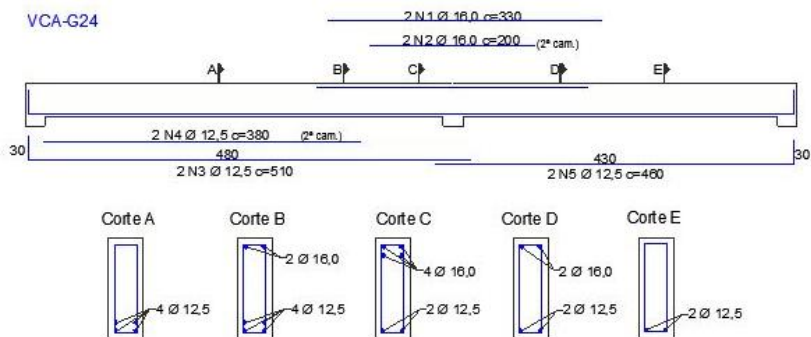


VCA-G22

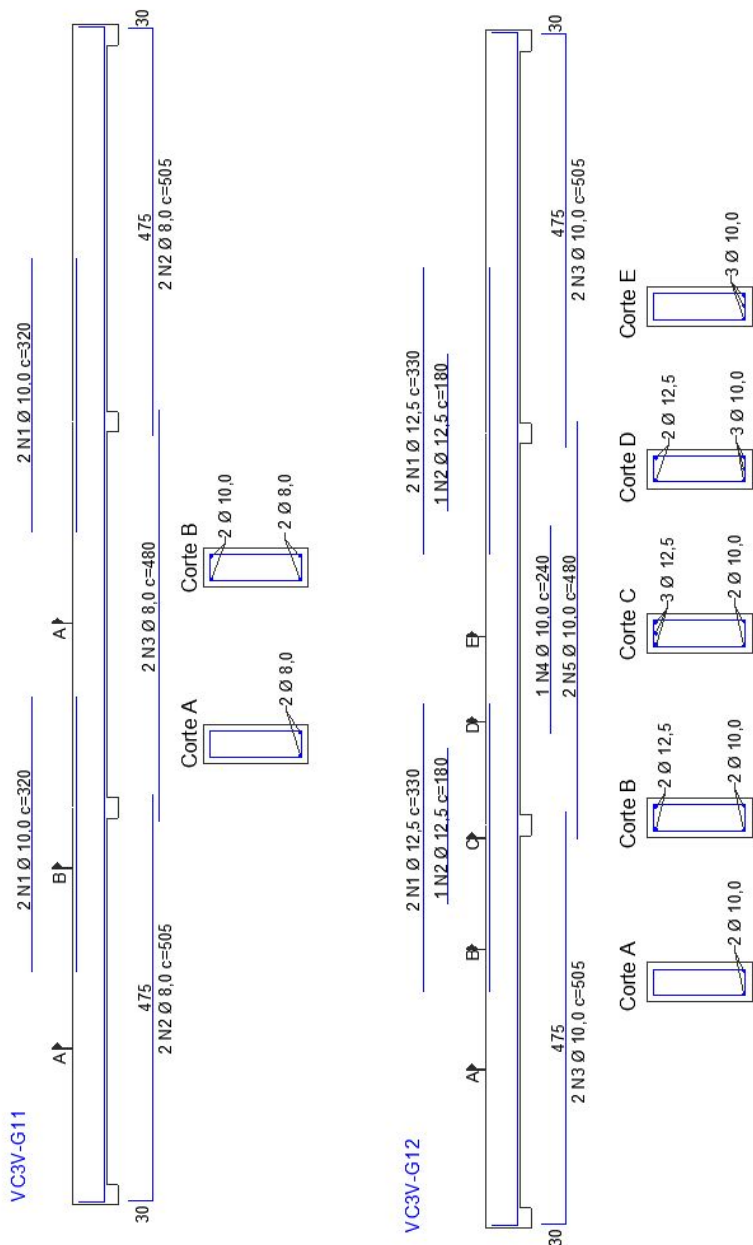


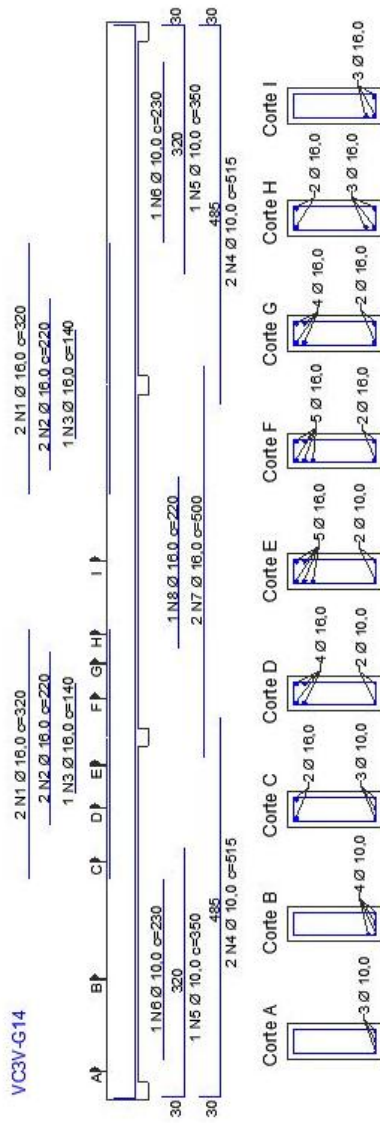
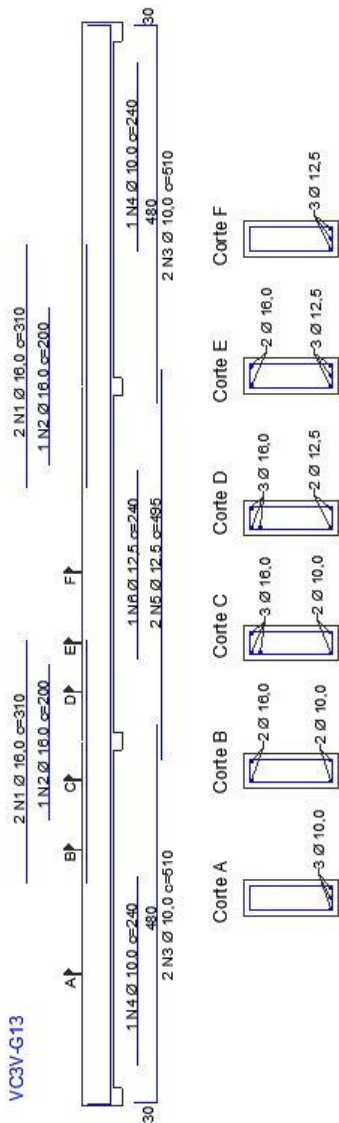
VCA-G23



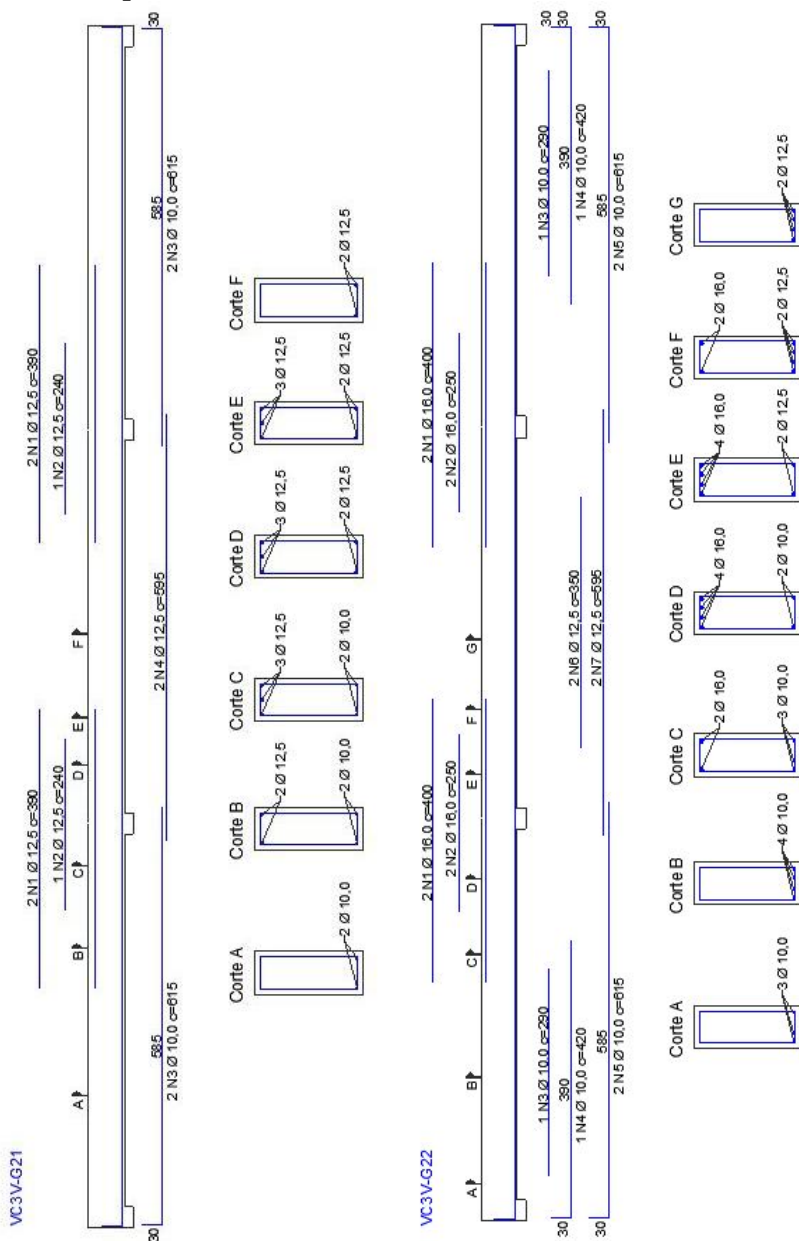


A.2.9 Grupo VC3V-G1

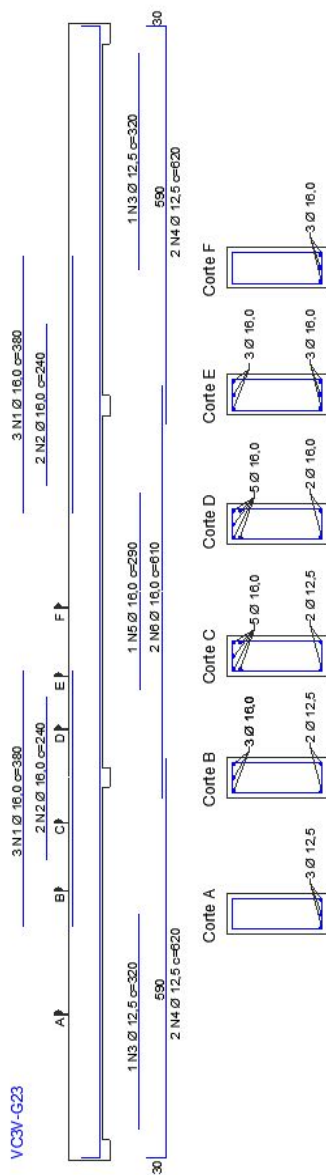




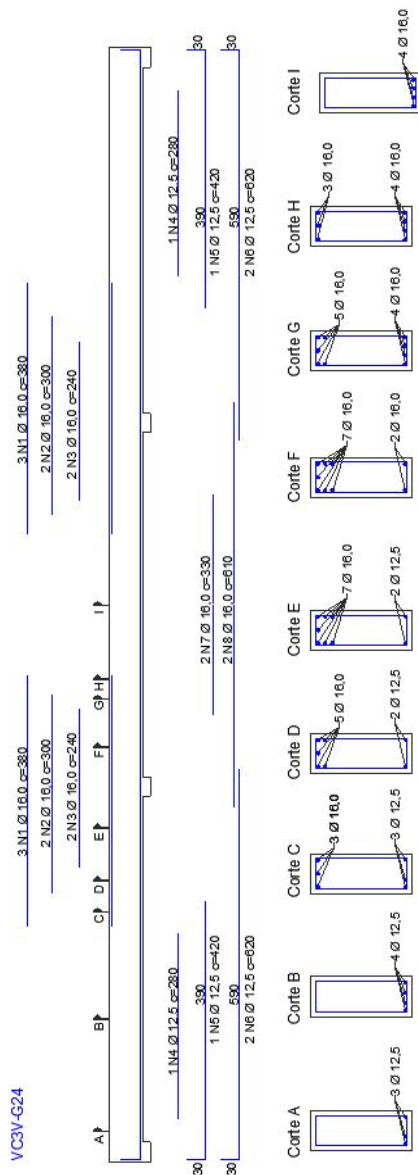
A.2.10 Grupo VC3V-G2



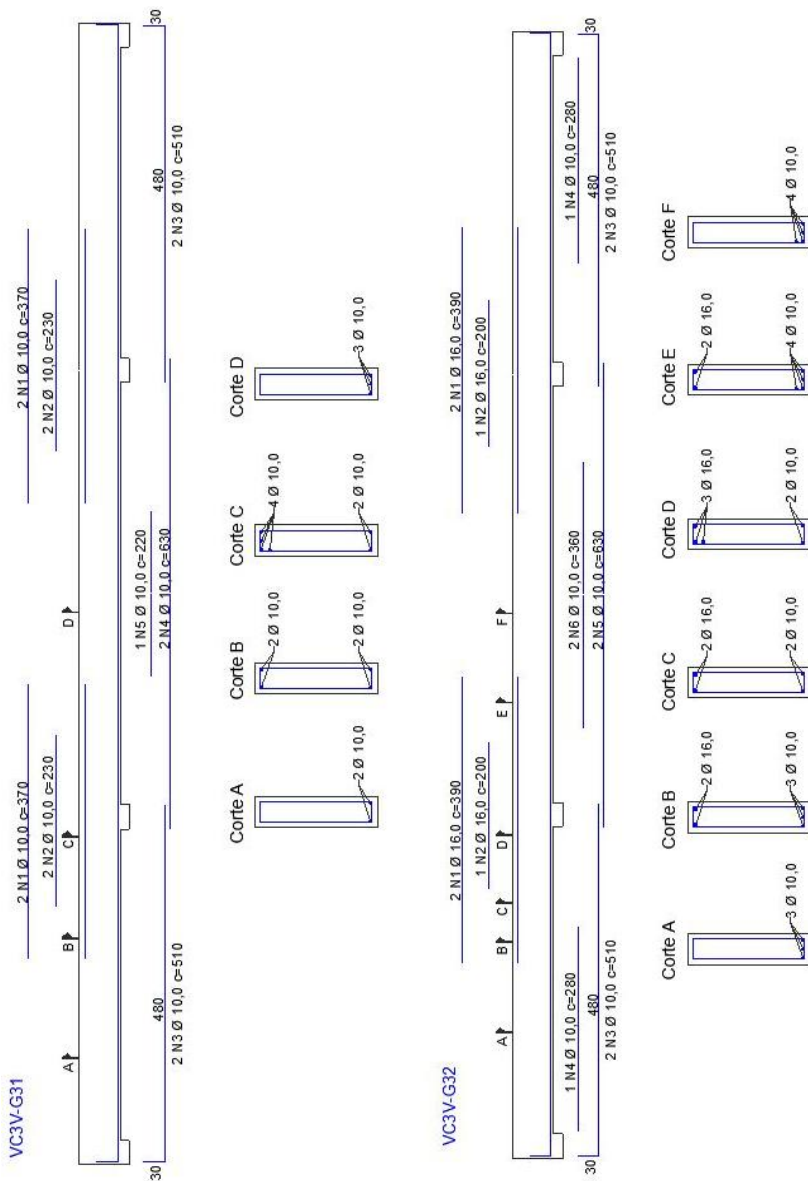
VC3V-G23

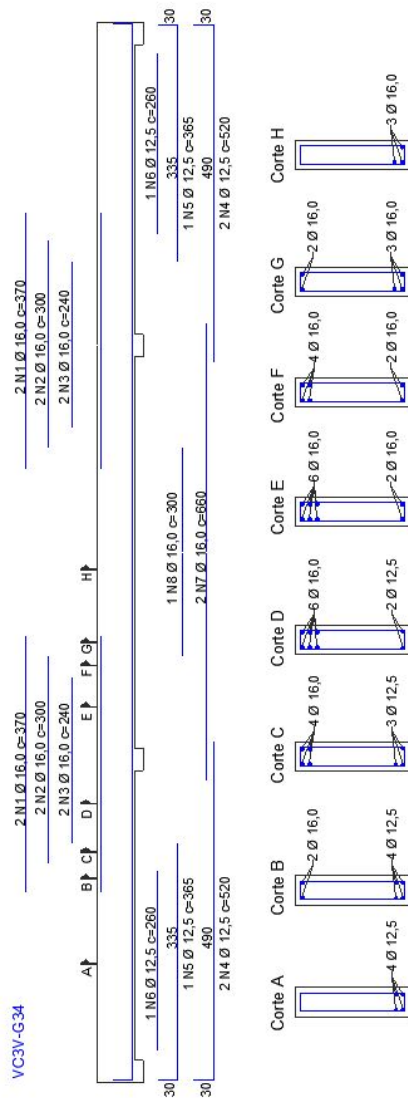
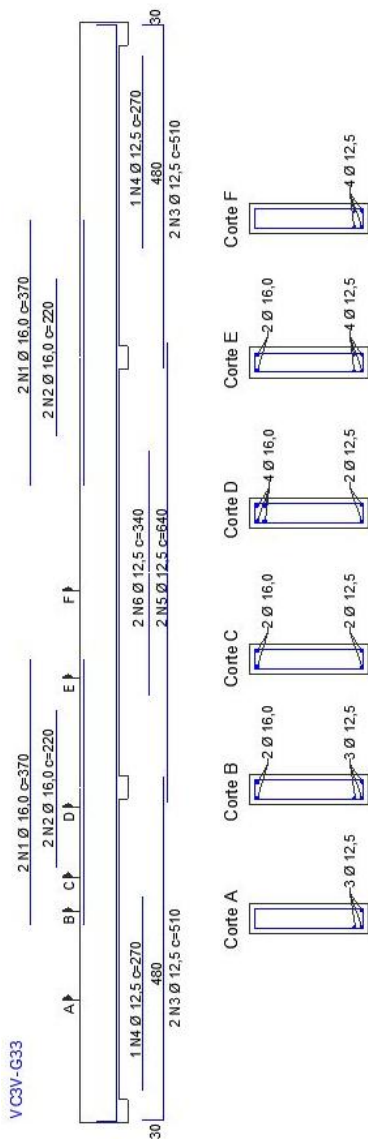


VC3V-G24

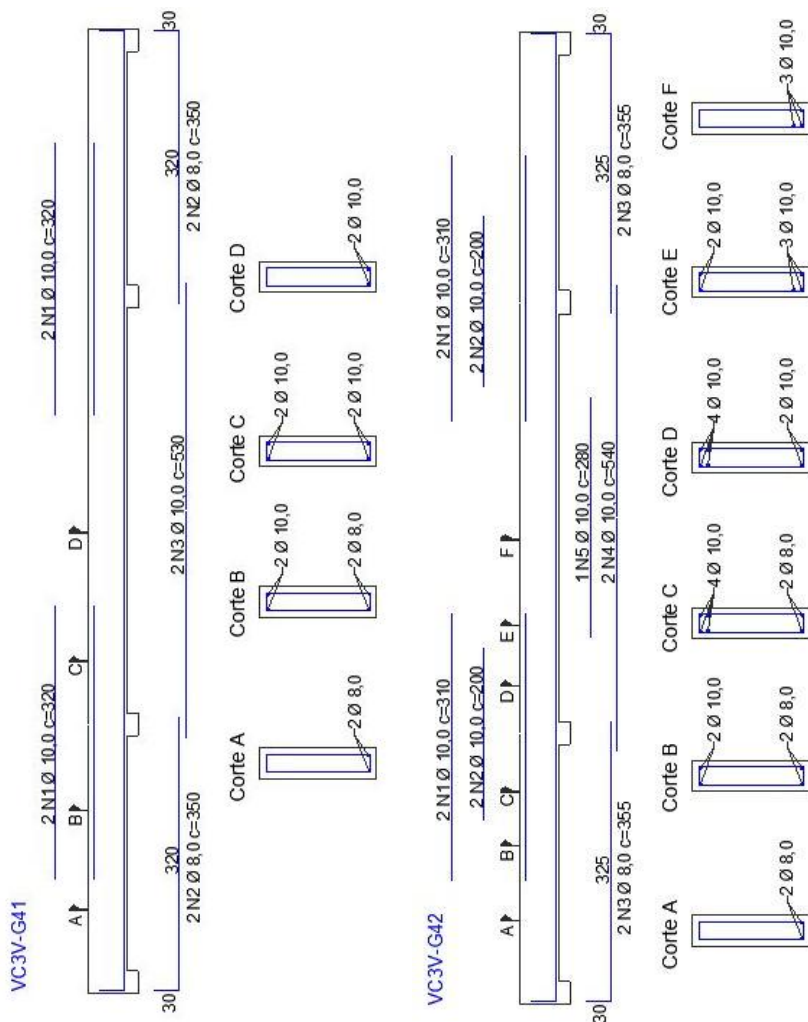


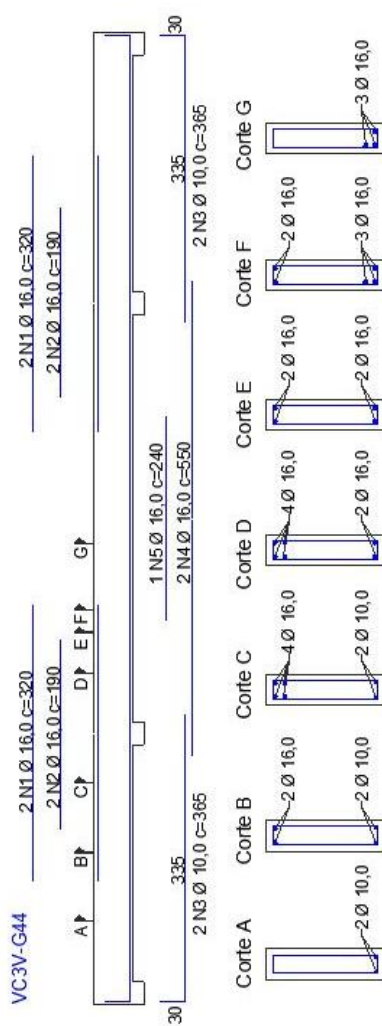
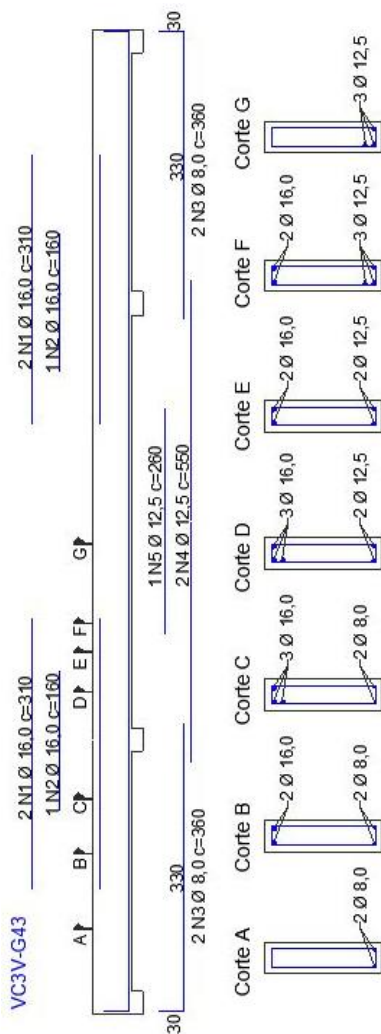
A.2.11 Grupo VC3V-G3





A.2.12 Grupo VC3V-G4





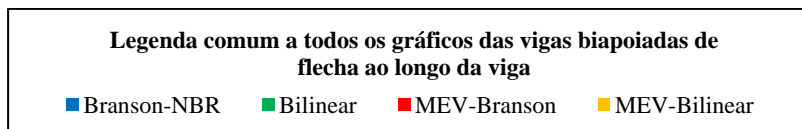
ANEXO B

Gráficos com as flechas ao longo das vigas para a carga total de serviço

Neste anexo estão os gráficos que mostram os resultados das flechas ao longo do comprimento da viga calculadas para a carga final de serviço por cada método ou modelo. Primeiramente estão mostrados os gráficos das vigas biapoiadas e no item B.2 os gráficos das vigas contínuas, todos separados em seus respectivos grupos de vigas.

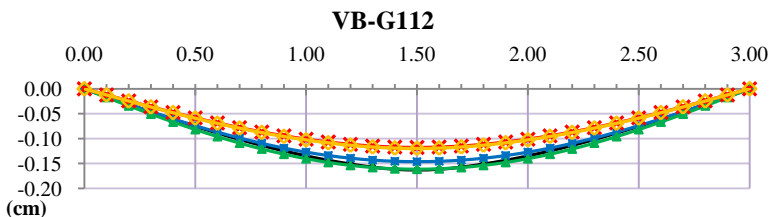
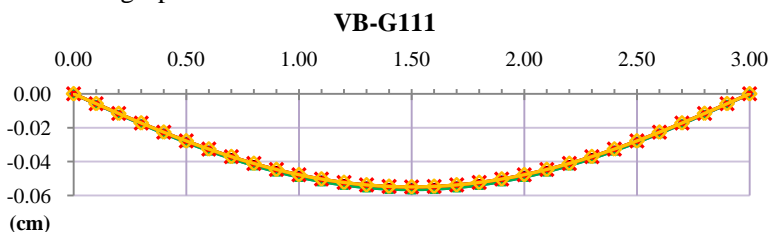
B.1 Vigas biapoiadas

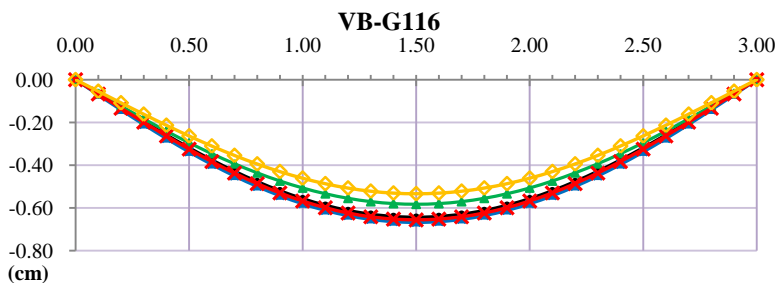
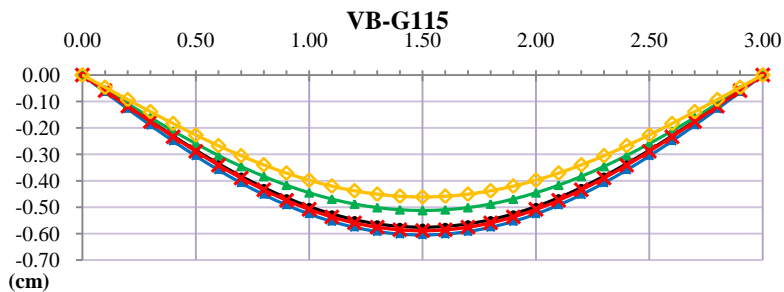
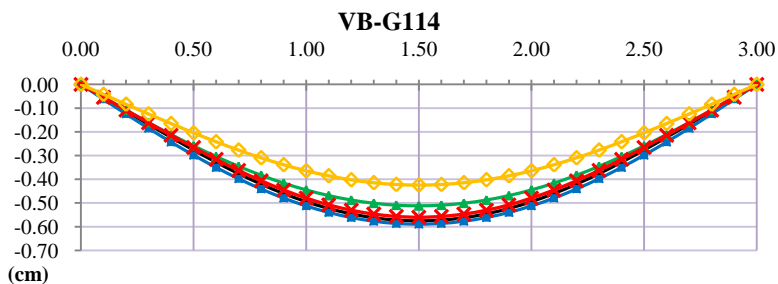
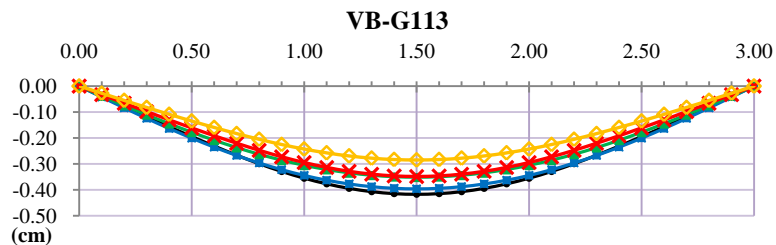
A fim de não tornar tão extenso este anexo, a legenda, que é comum a todos as vigas biapoiadas deste item, está mostrada a seguir e foi suprimida dos gráficos. Nos gráficos o eixo horizontal representa o comprimento da viga, em metros (m), e no eixo vertical estão as flechas em centímetros (cm).

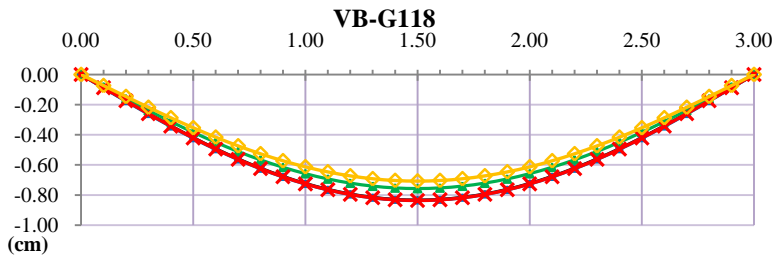
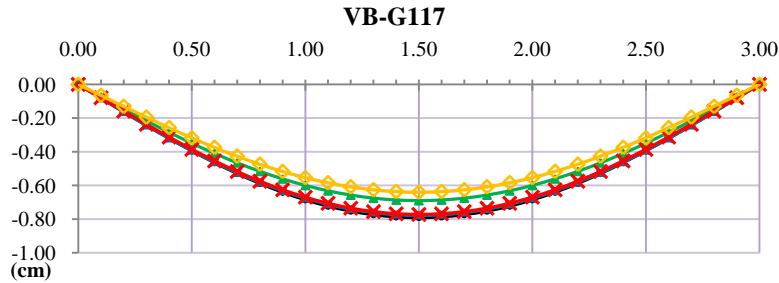


B.1.1 Grupo VB-G1

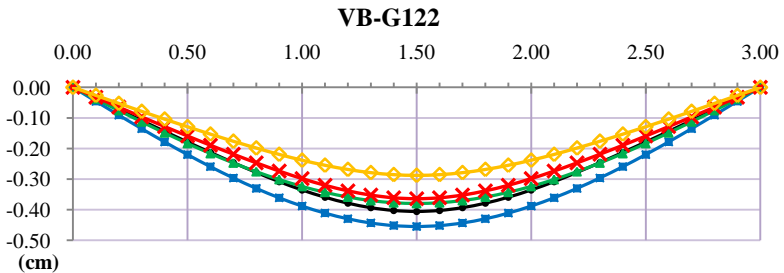
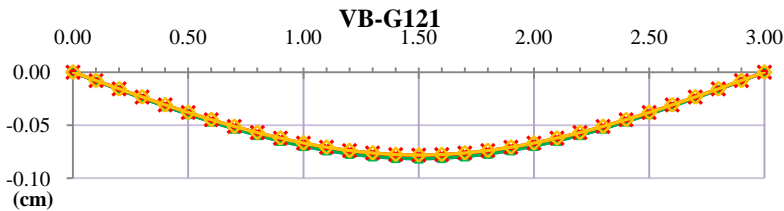
- Subgrupo VB-G11

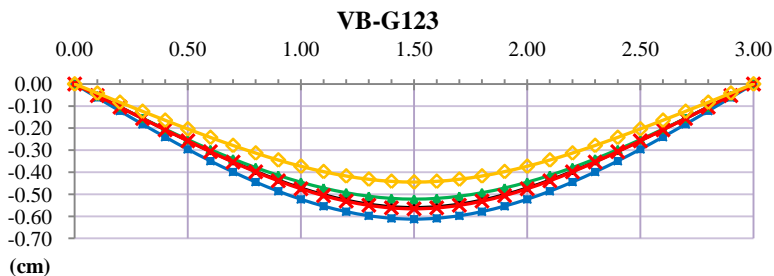






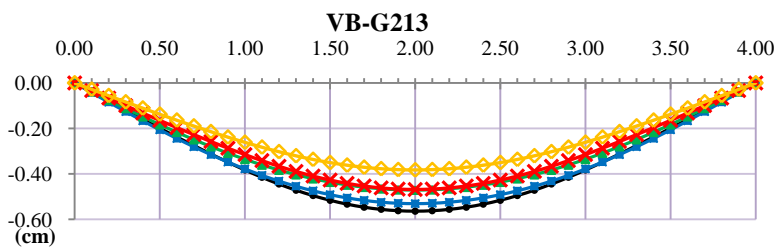
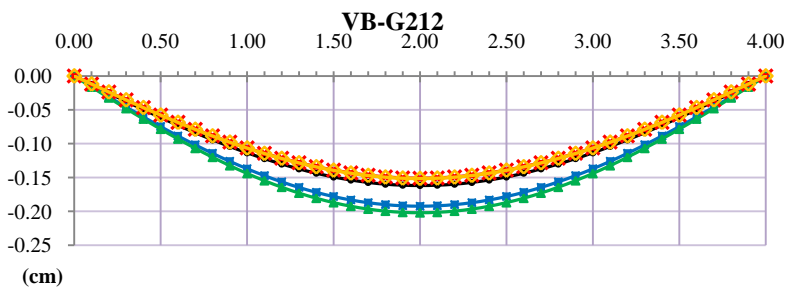
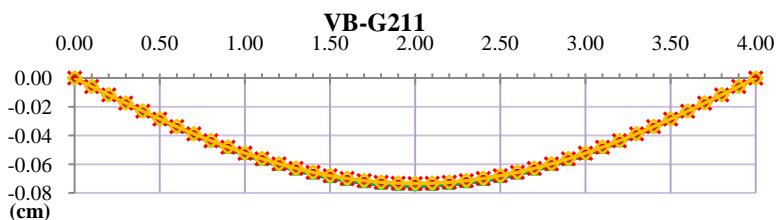
- Subgrupo VB-G12

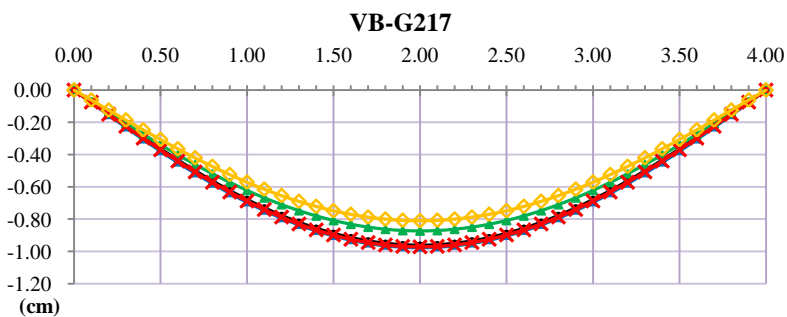
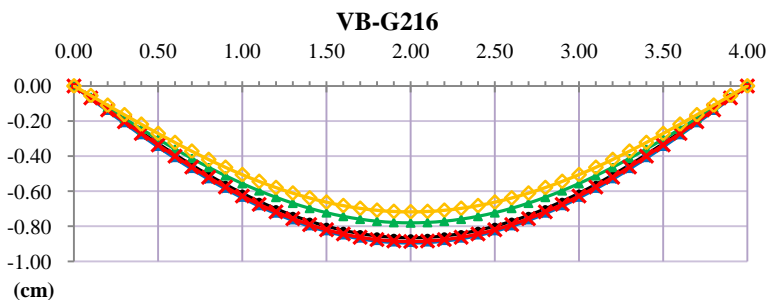
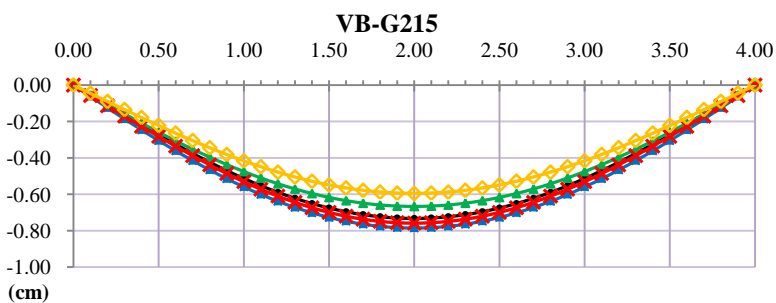
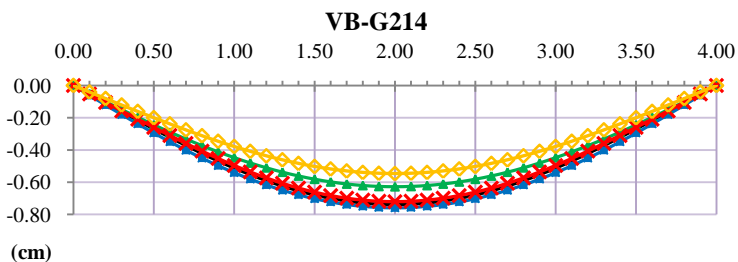


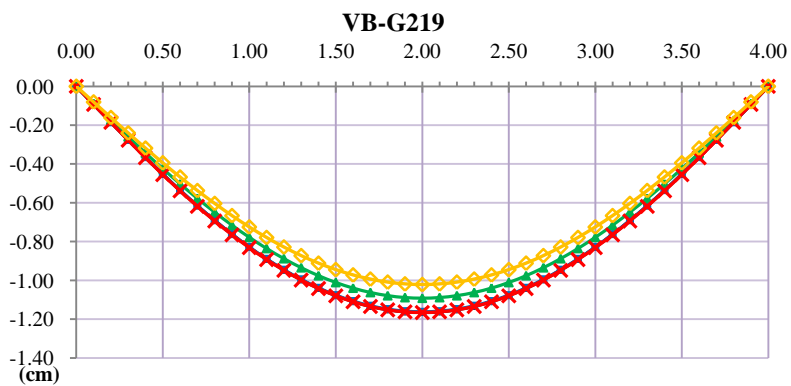
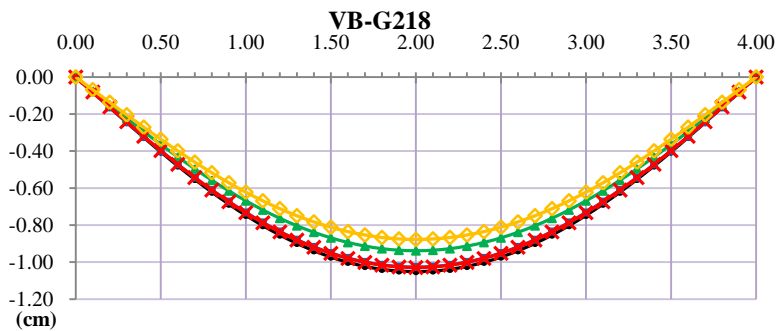


B.1.2 Grupo VB-G2

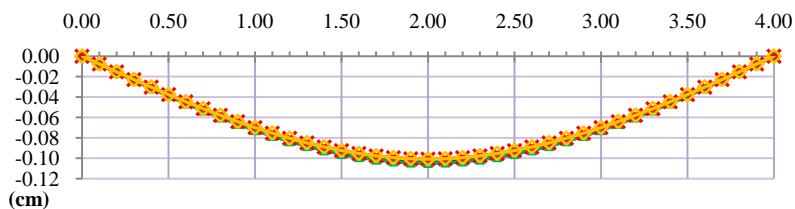
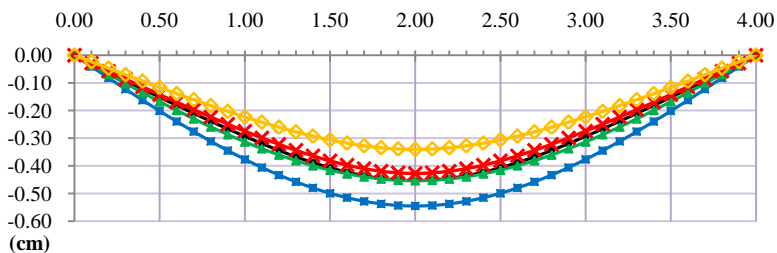
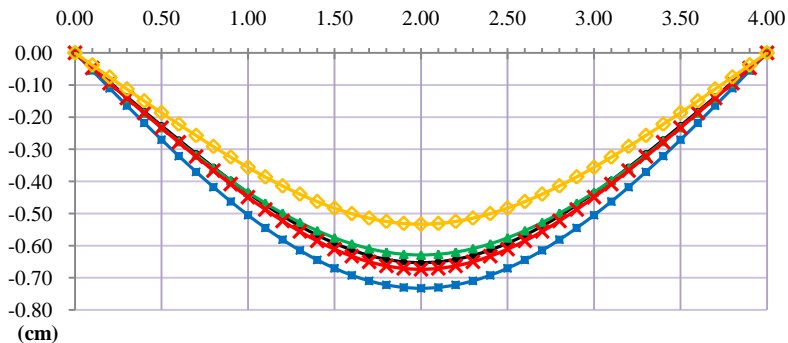
- Subgrupo VB-G21





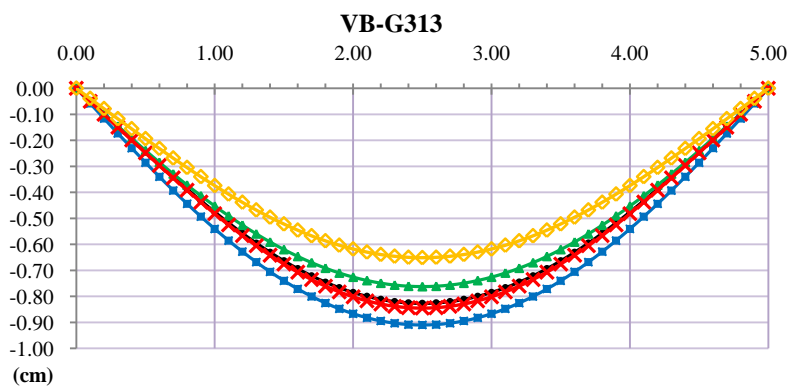
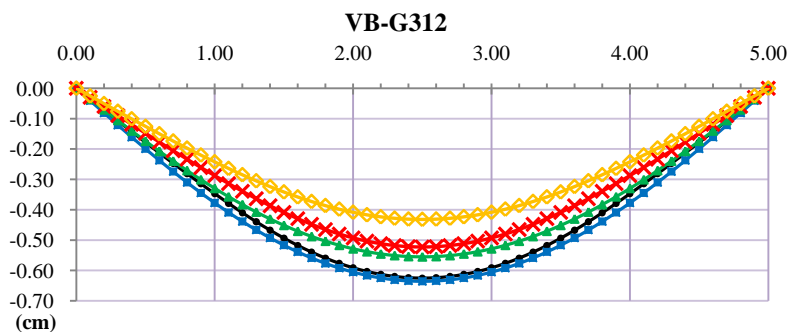
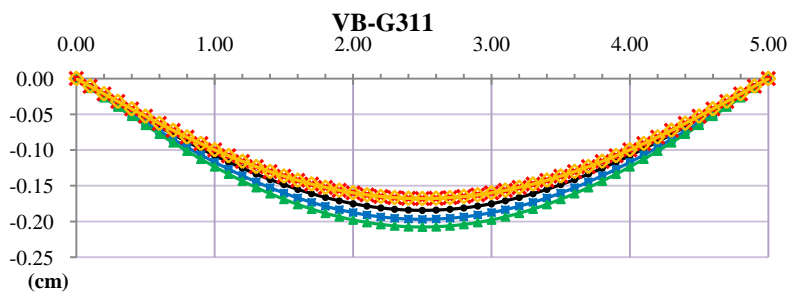


- Subgrupo VB-G22:

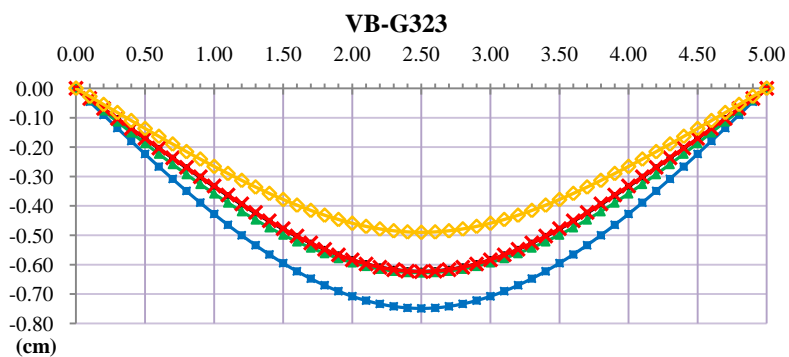
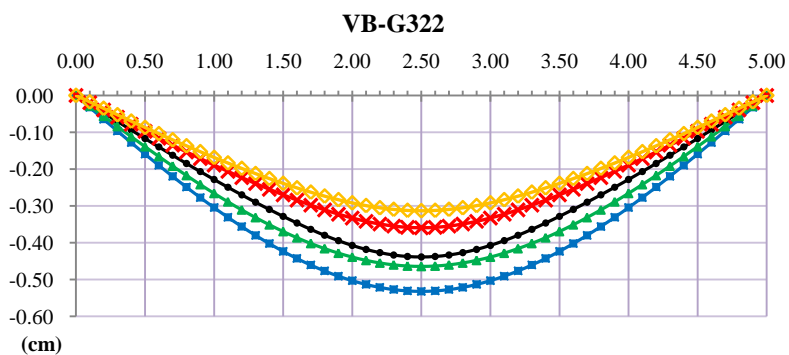
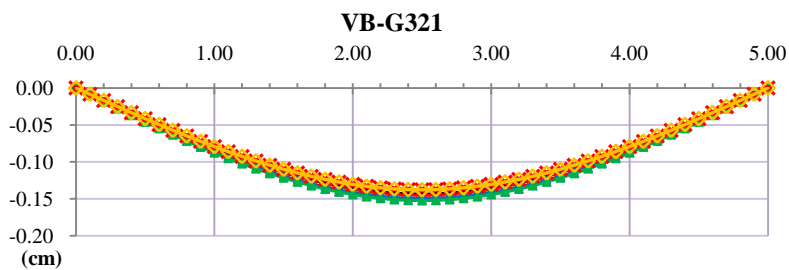
VB-G221**VB-G222****VB-G223**

B.1.3 Grupo VB-G3

- Subgrupo VB-G31:

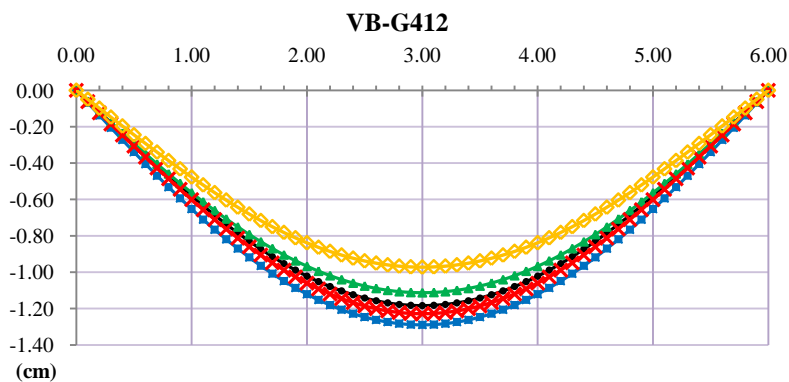
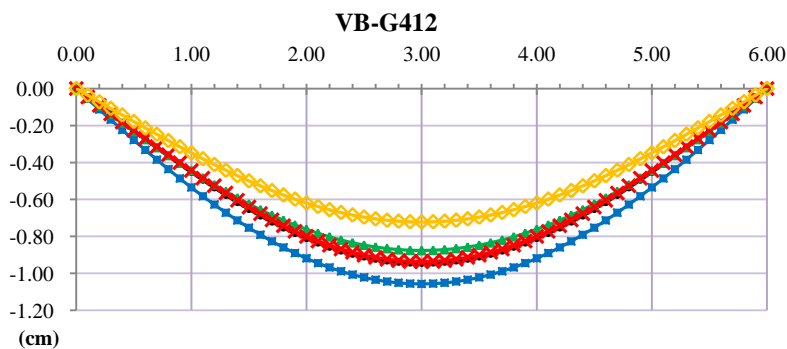
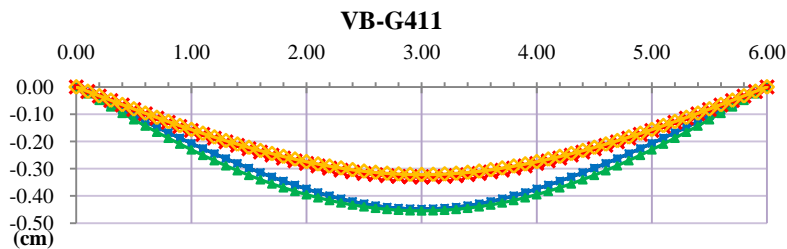


- Subgrupo VB-G32:

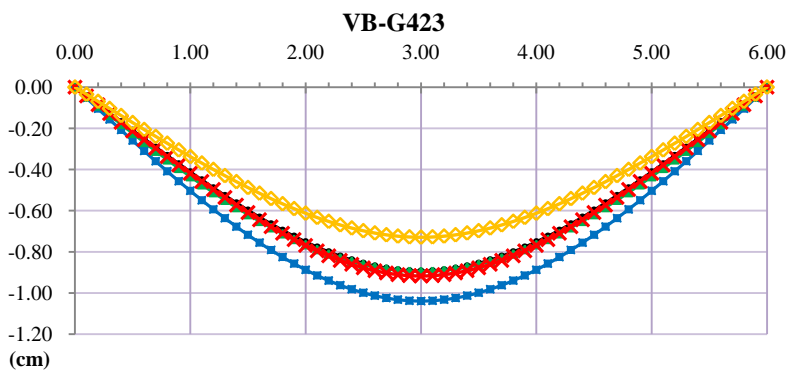
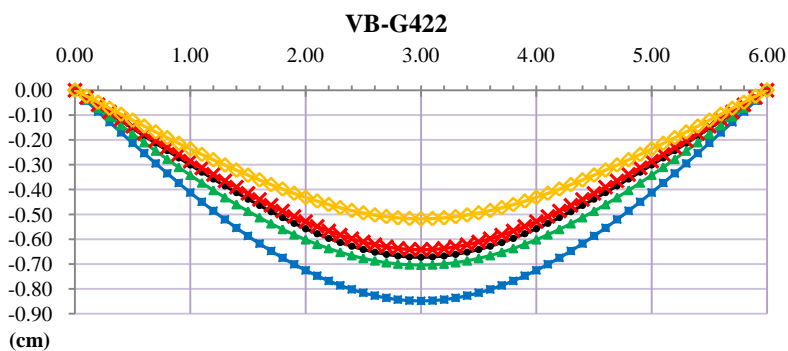
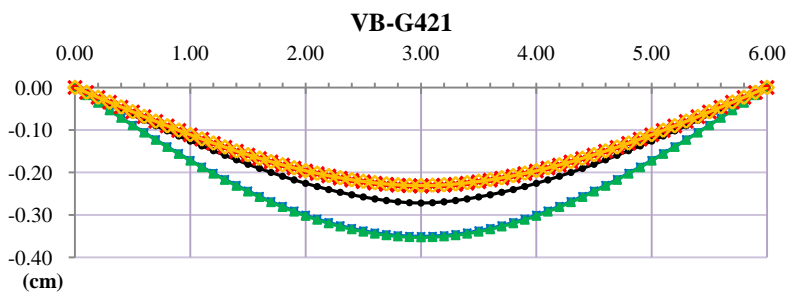


B.1.4 Grupo VB-G4

- Subgrupo VB-G41:

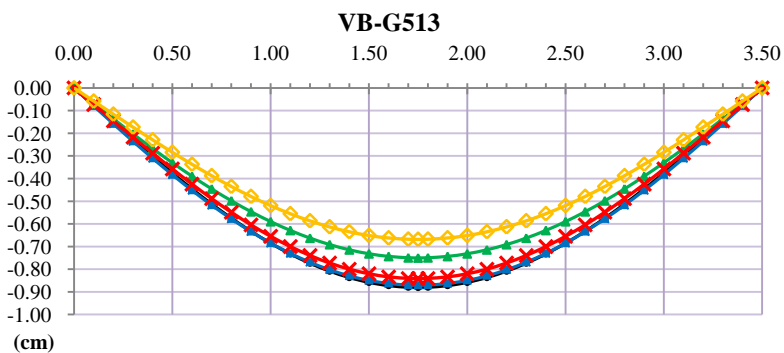
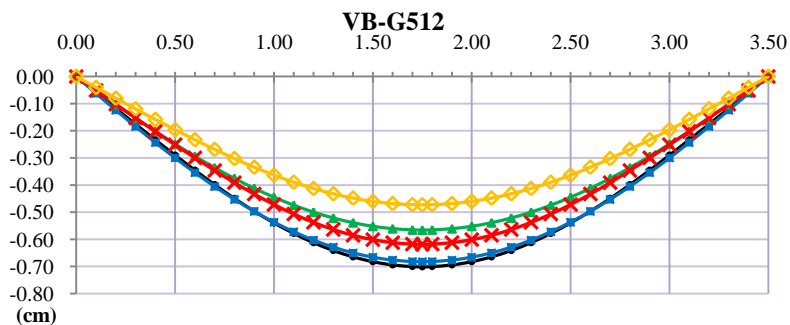
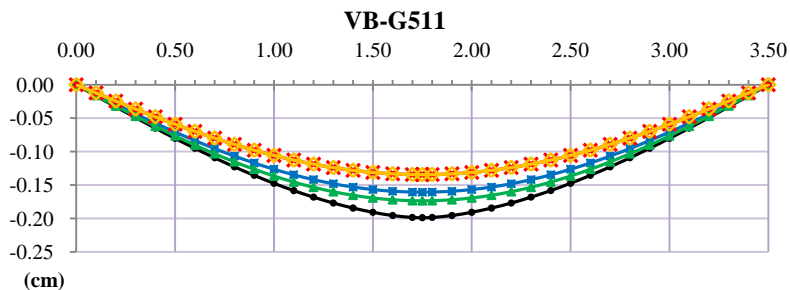


- Subgrupo VB-G42:

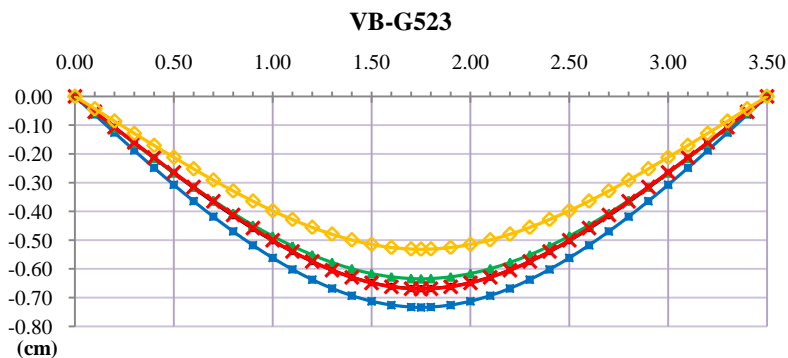
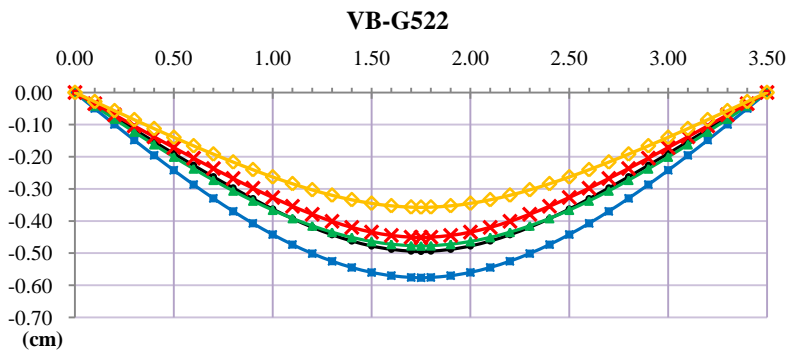
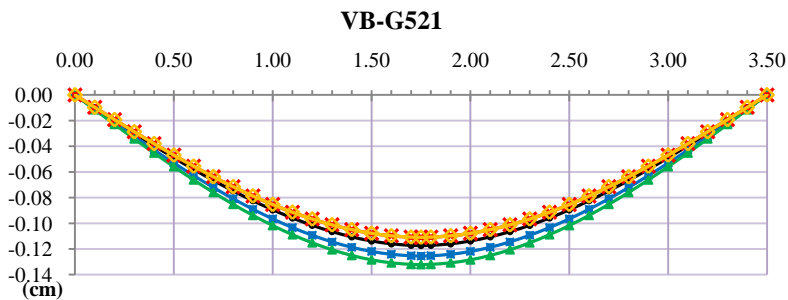


B.1.5 Grupo VB-G5

- Subgrupo VB-G51:

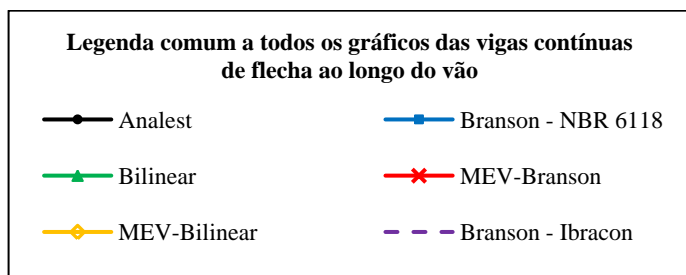


- Subgrupo VB-G52:



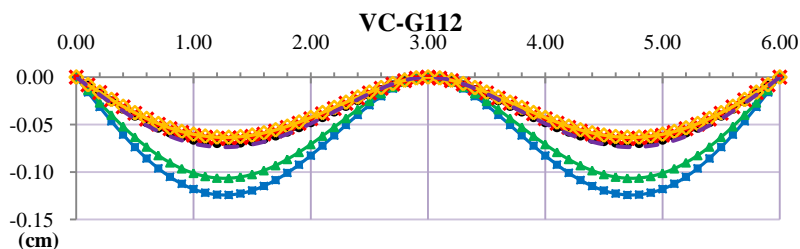
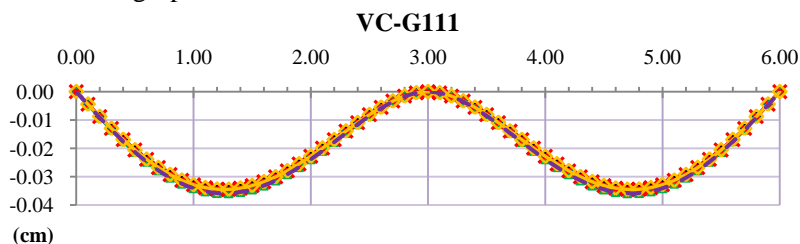
B.2 Vigas Contínuas

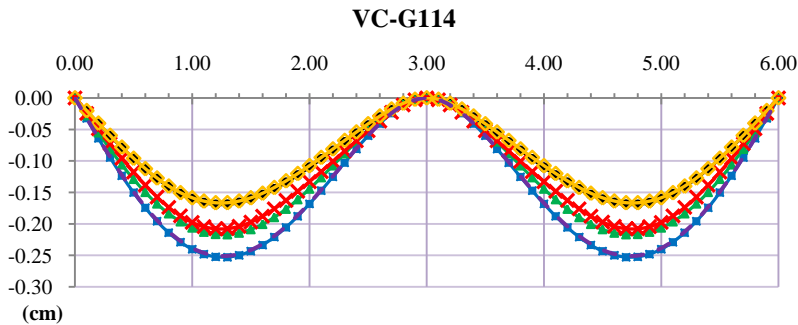
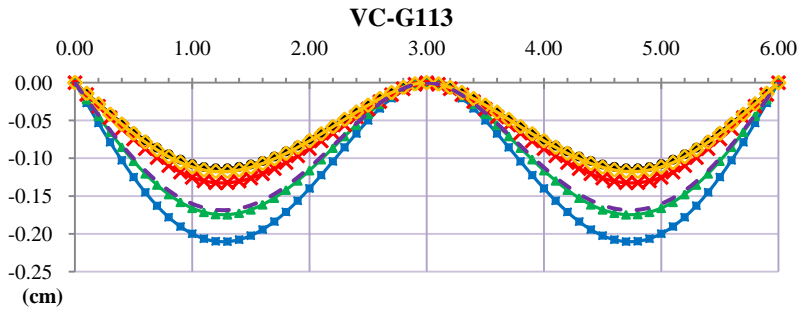
Neste item estão dispostos os gráficos com as flechas ao longo do comprimento das vigas de cada grupo calculadas pelos diferentes métodos e modelos estudados para a carga total de serviço. Como nas vigas biapoiadas, a legenda dos gráficos é igual para todas as vigas, então é mostrada na figura seguinte e suprimida dos gráficos a fim de não tornar tão extenso este Anexo.



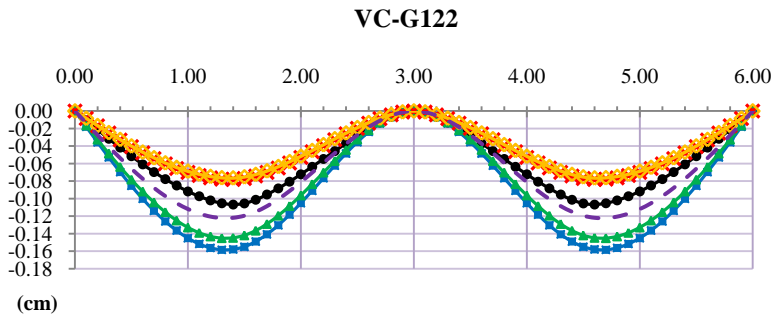
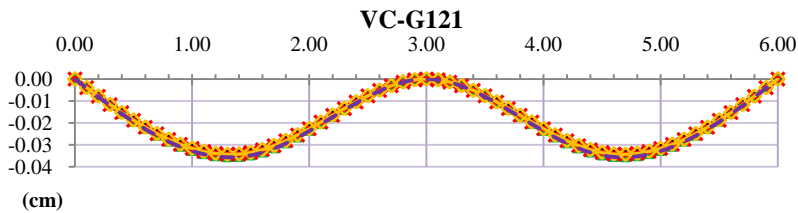
B.2.1 Grupo VC-G1

- Subgrupo VC-G11:

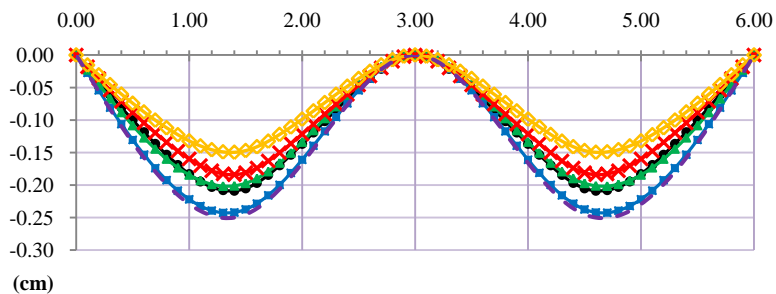




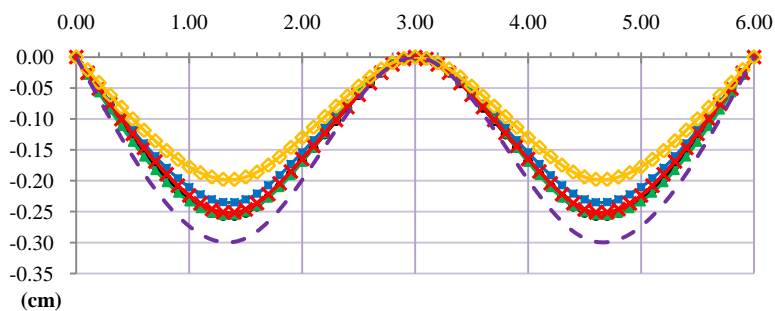
- Subgrupo VC-G12:



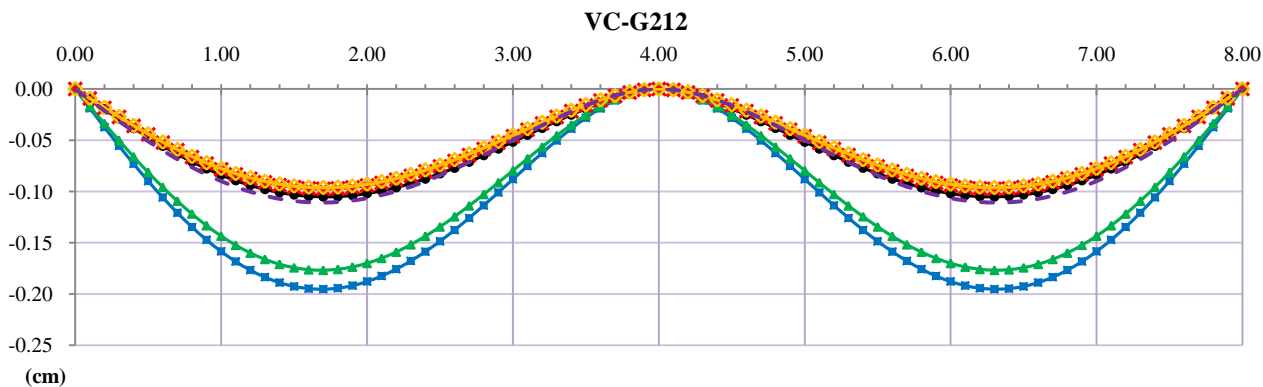
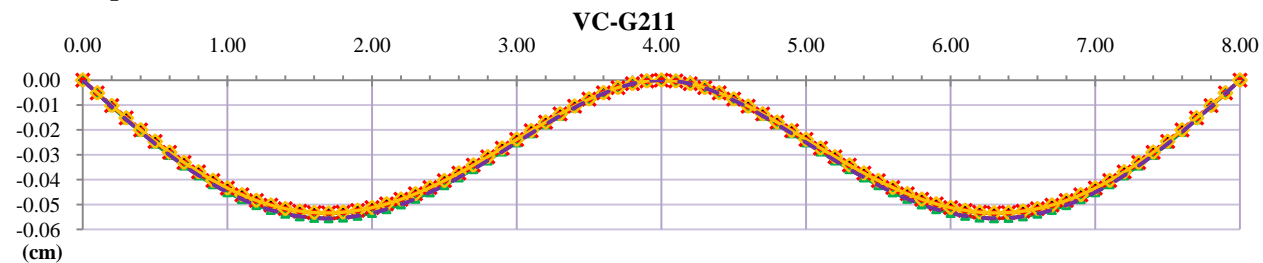
VC-G123



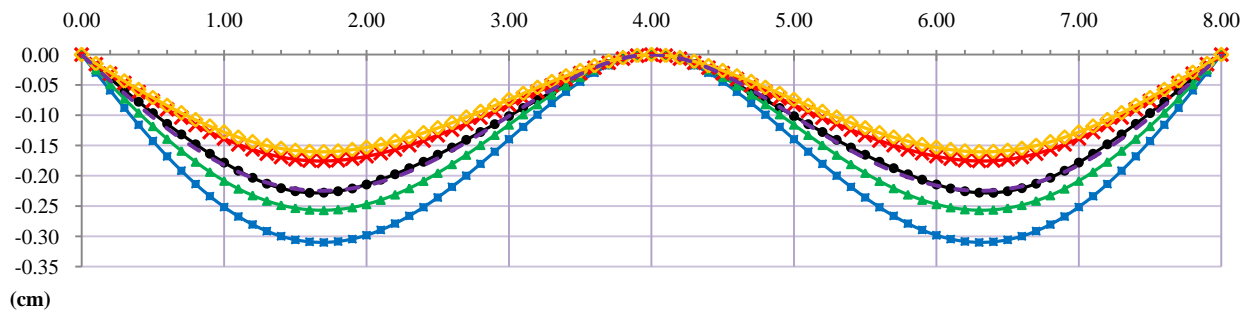
VC-G124



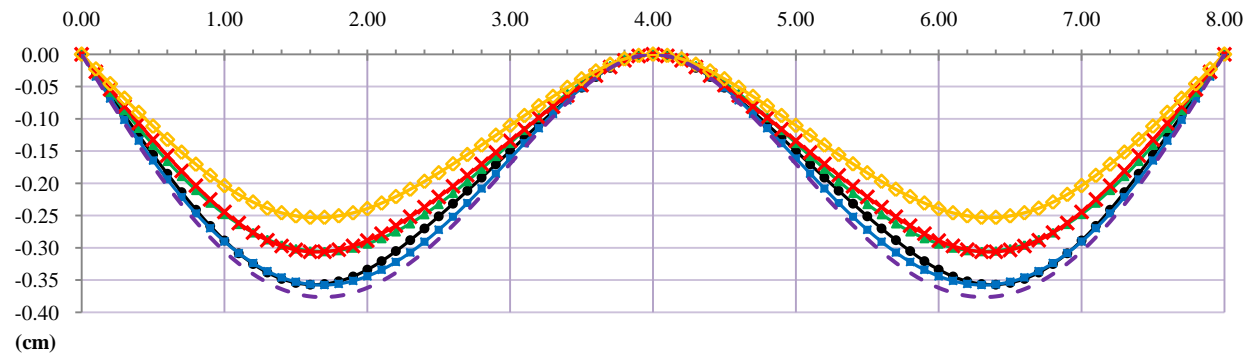
B.2.2 Grupo VC-G2



VC-G213

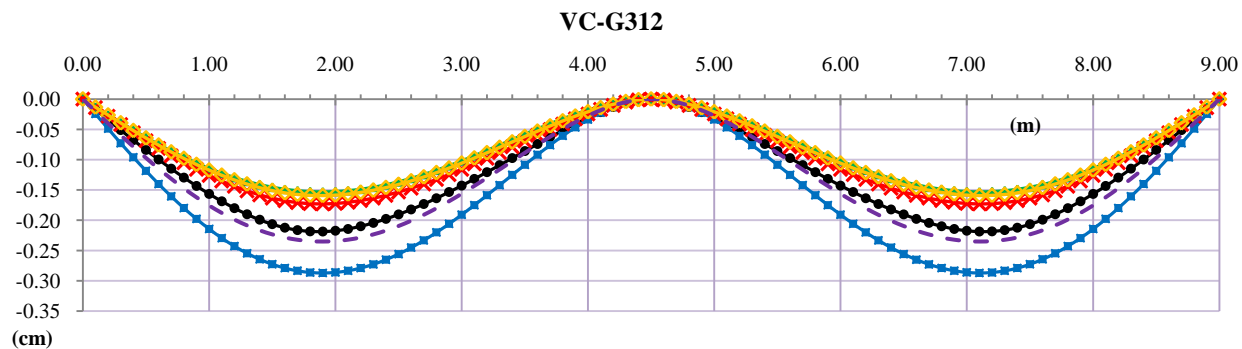
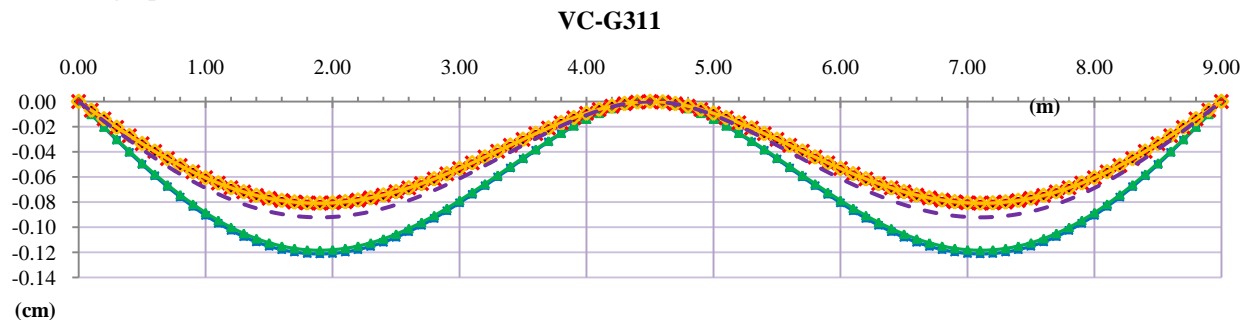


VC-G214

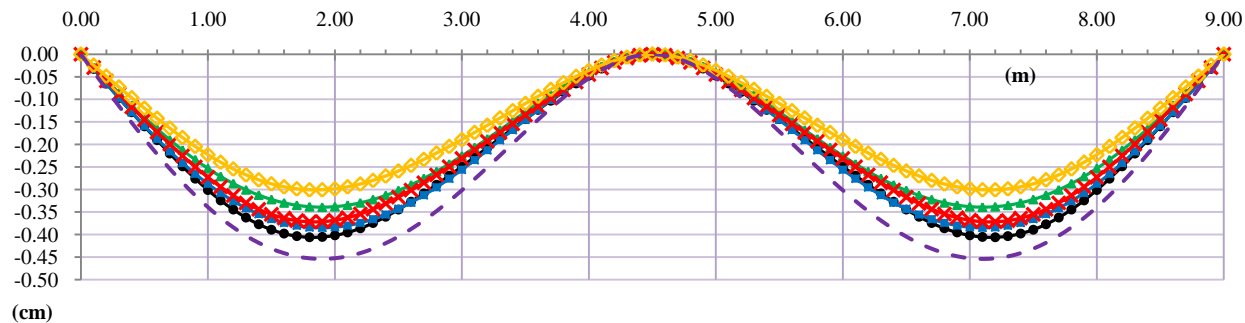


B.2.3 Grupo VC-G3

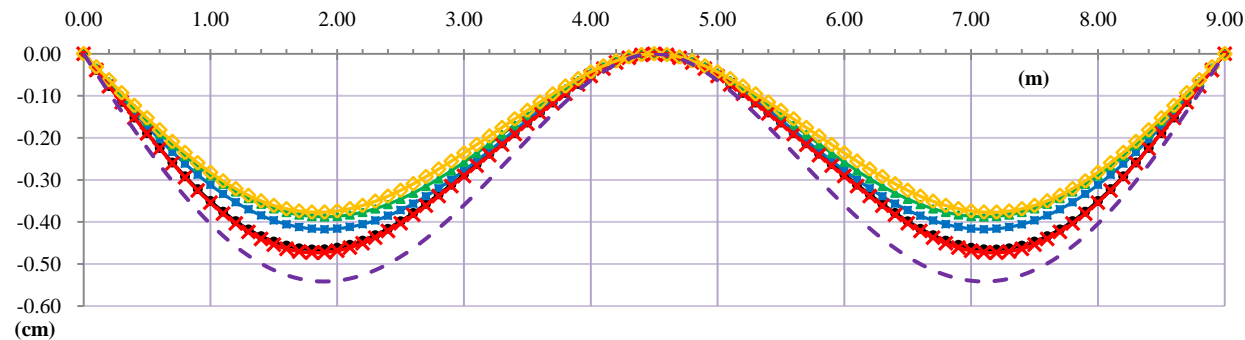
- Subgrupo VC-G31:



VC-G313

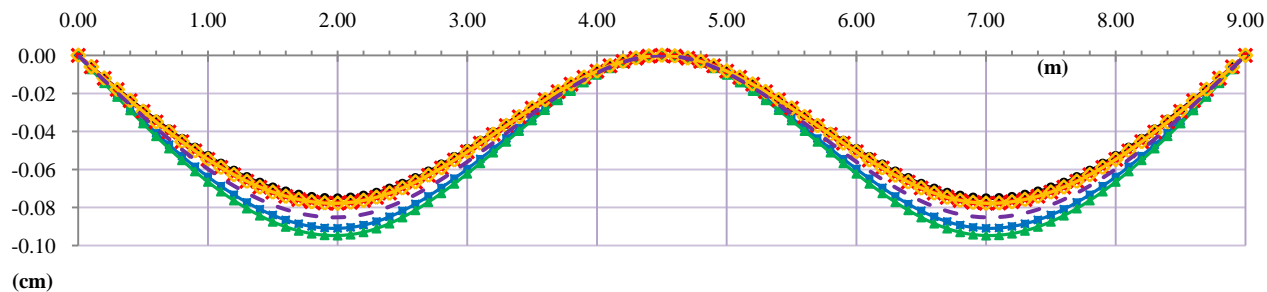


VC-G314

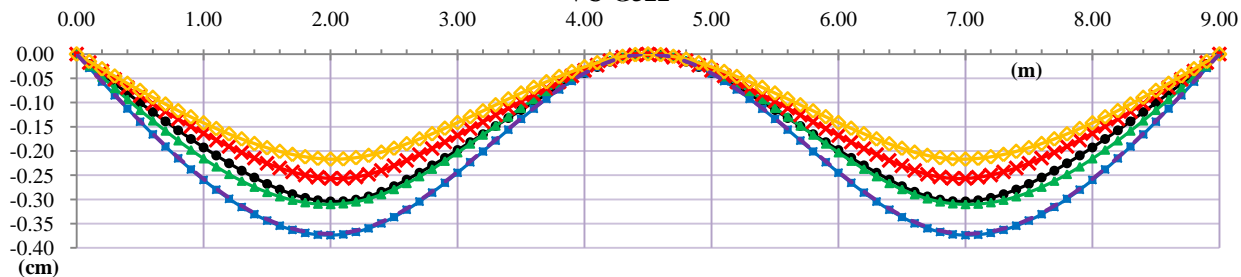


- Subgrupo VC-G32:

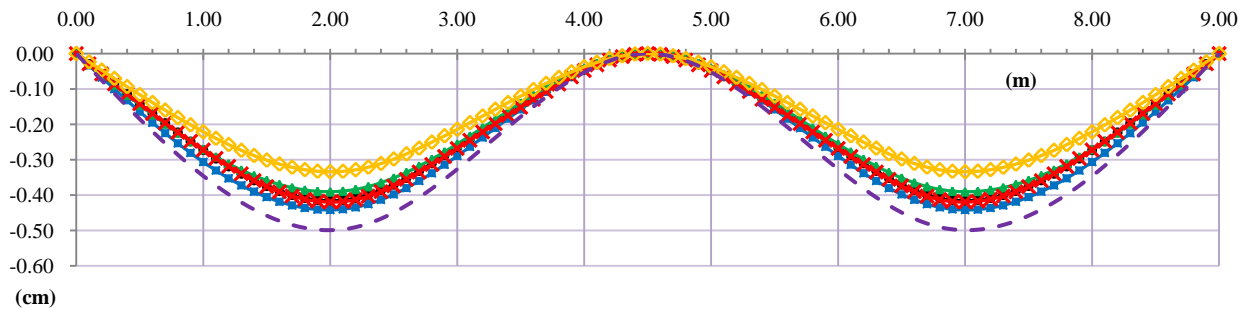
VC-G321



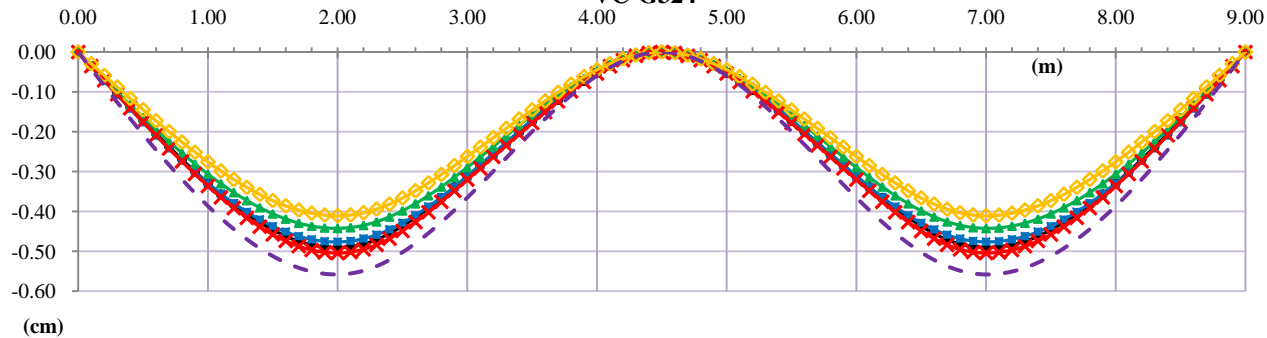
VC-G322



VC-G323

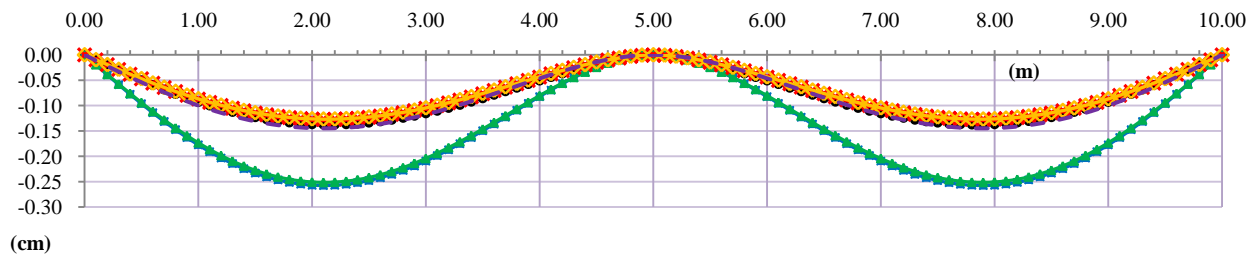


VC-G324

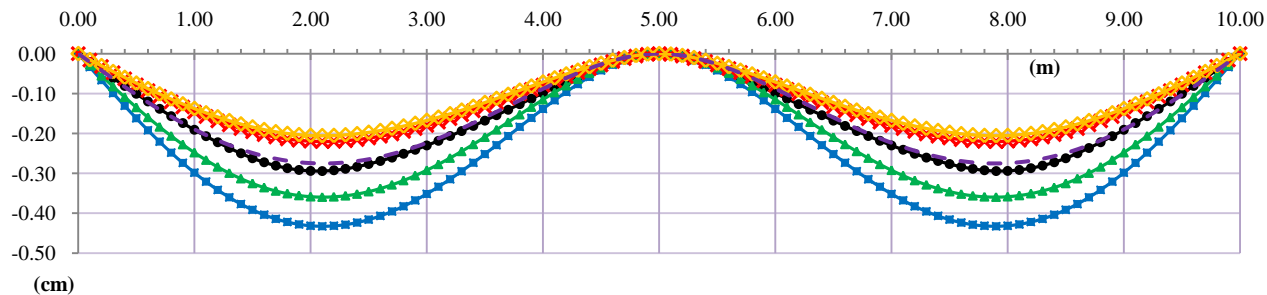


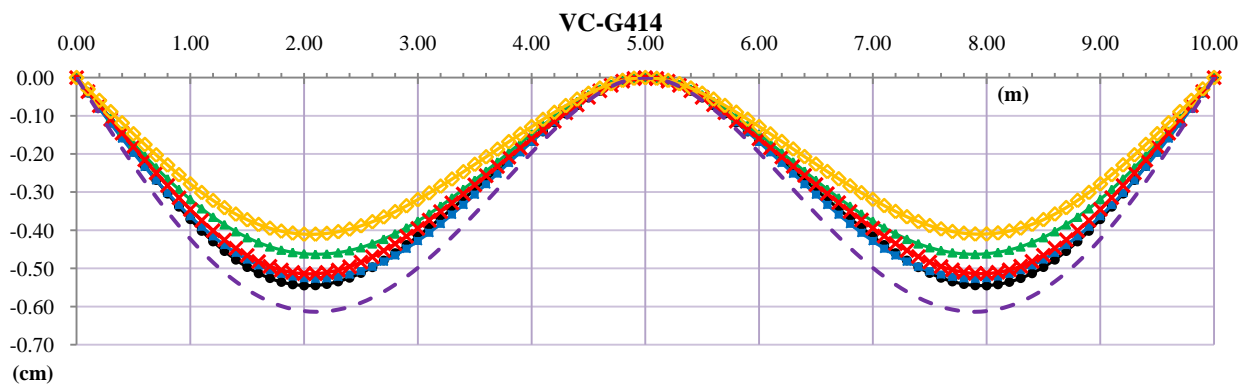
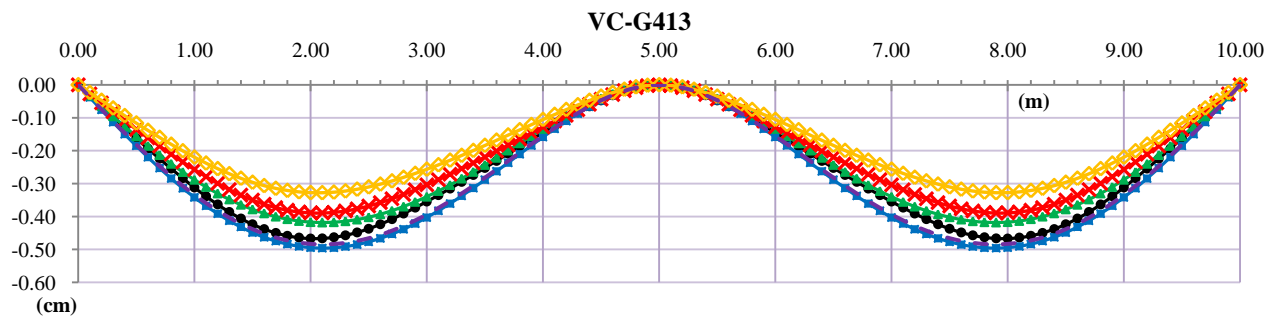
B.2.4 Grupo VC-G4

VC-G411



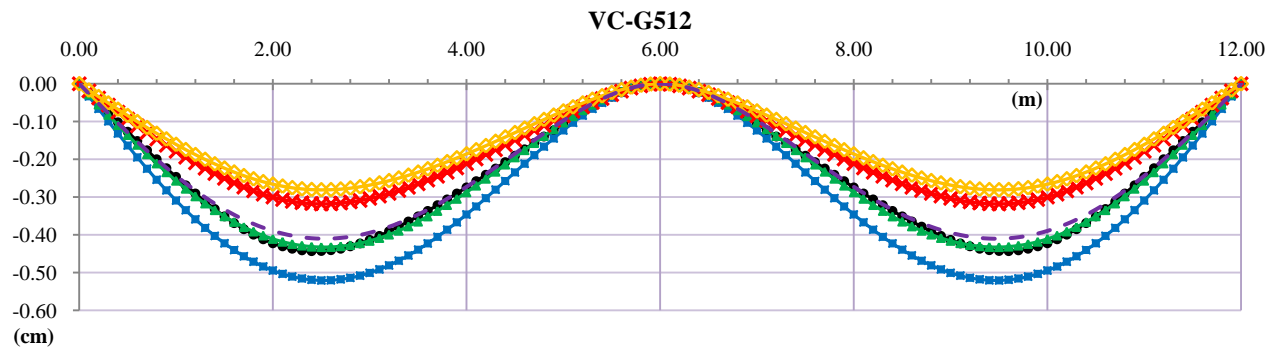
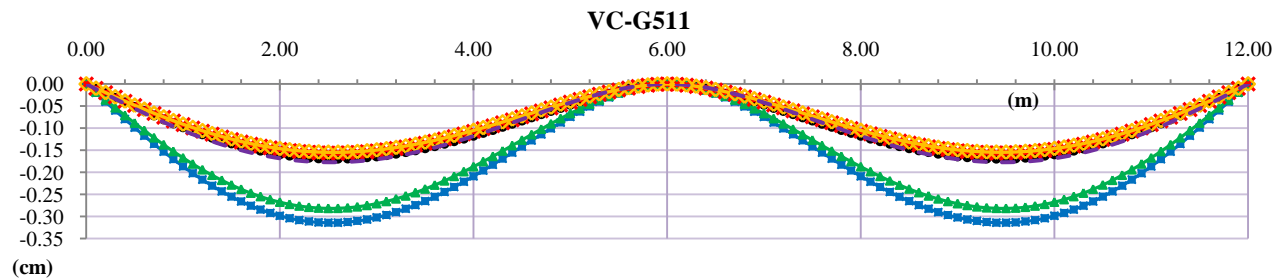
VC-G412



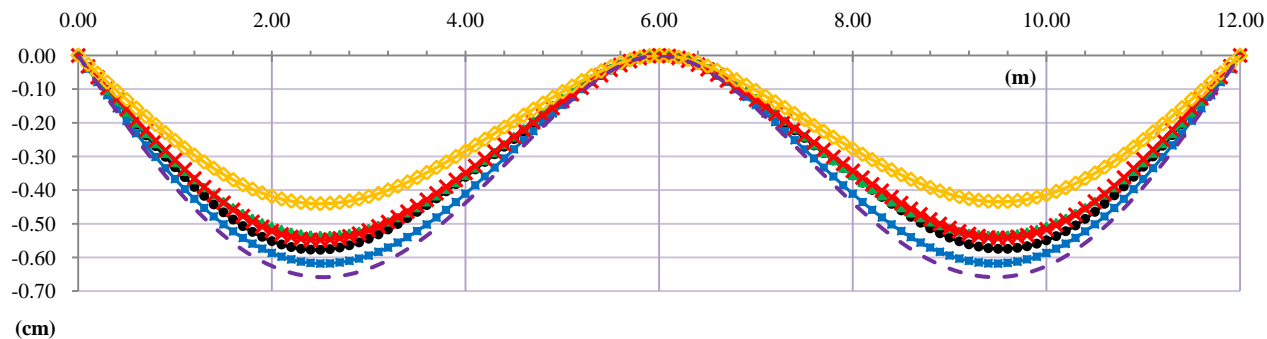


B.2.5 Grupo VC-G5

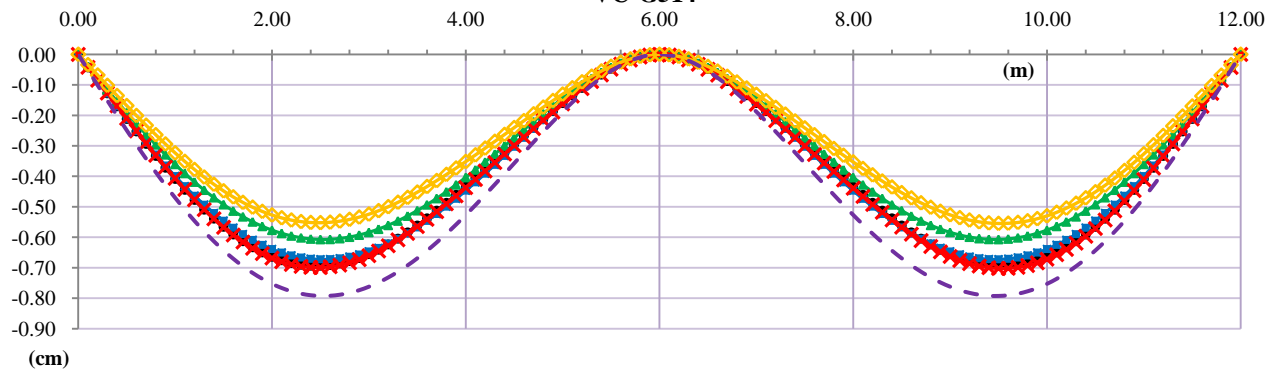
- Subgrupo VC-G51:



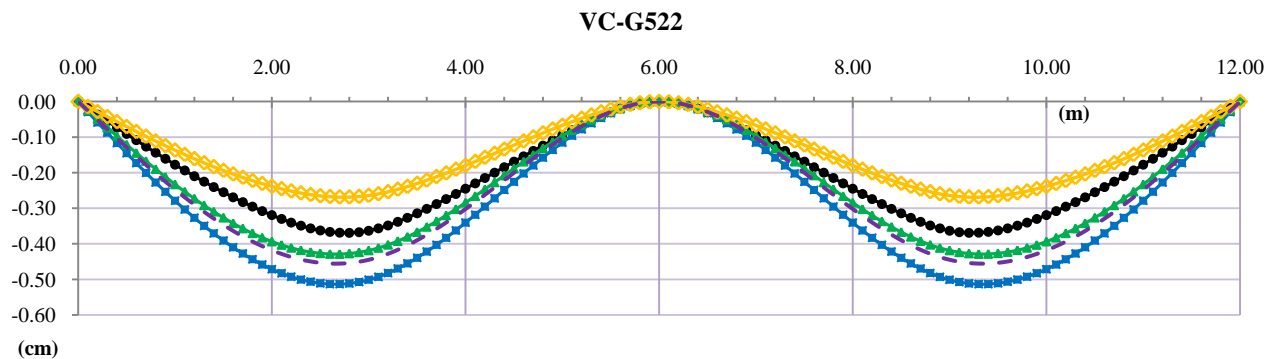
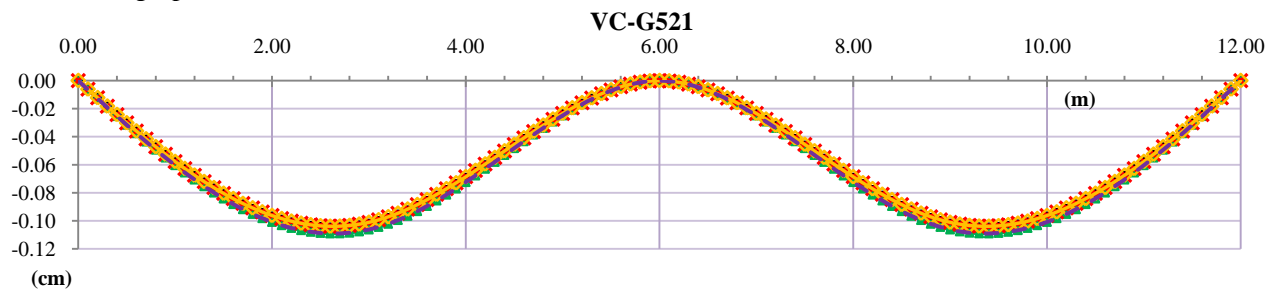
VC-G513

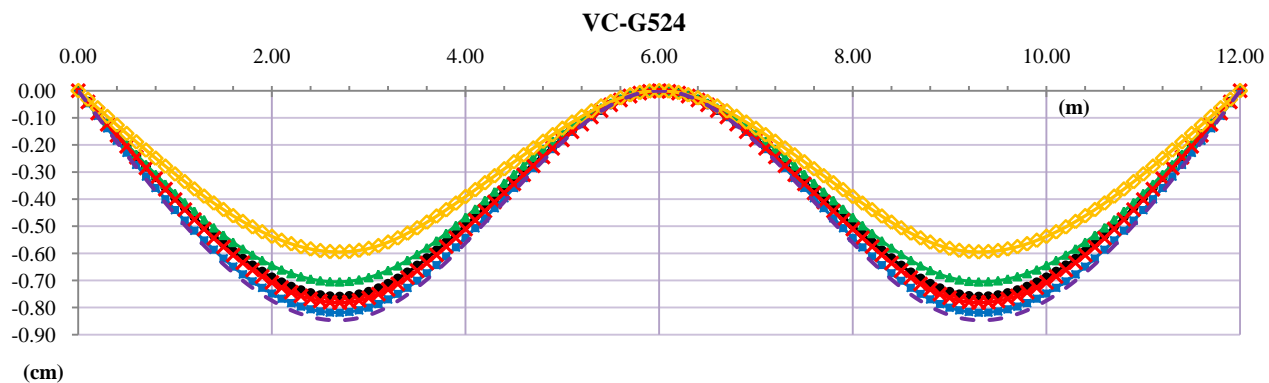
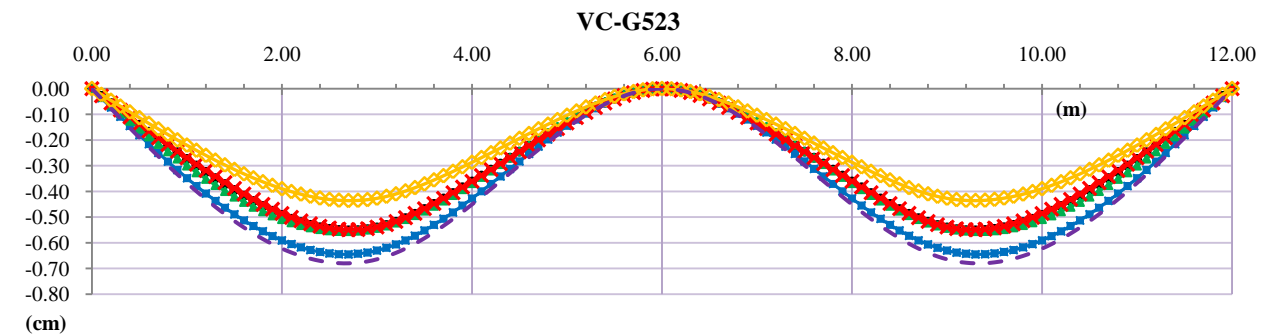


VC-G514

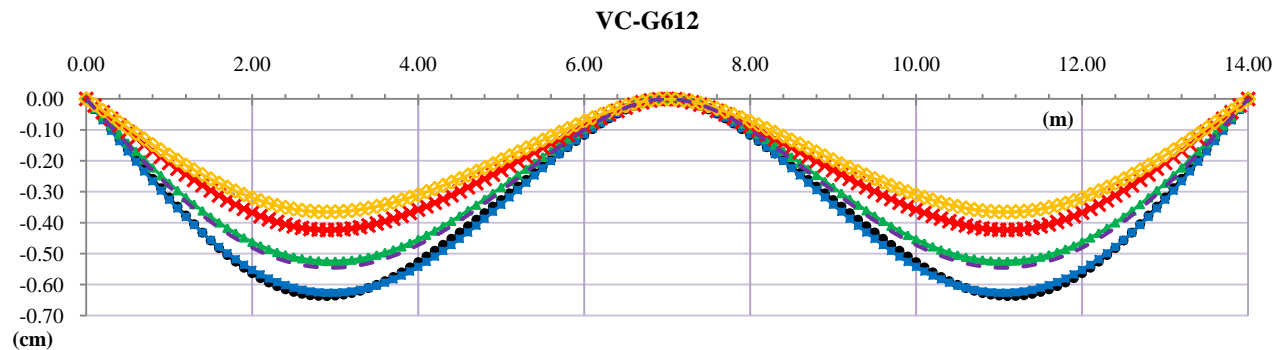
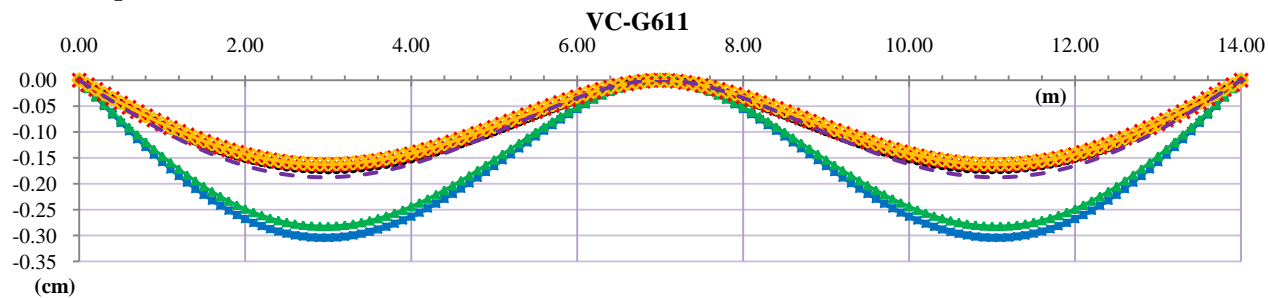


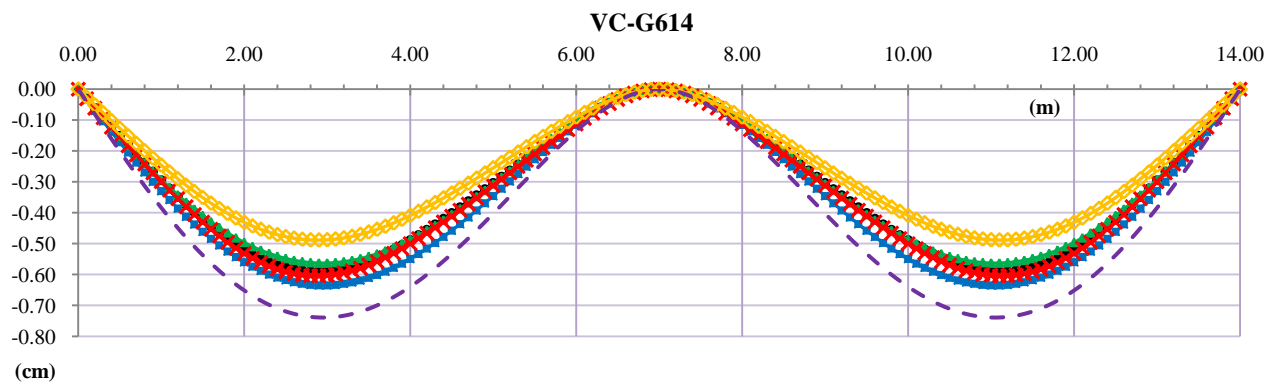
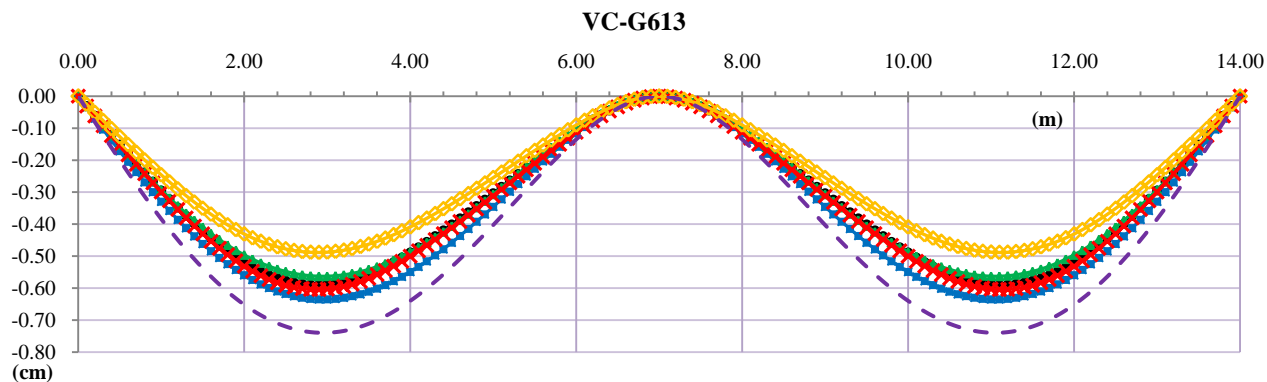
- Subgrupo VC-G52:



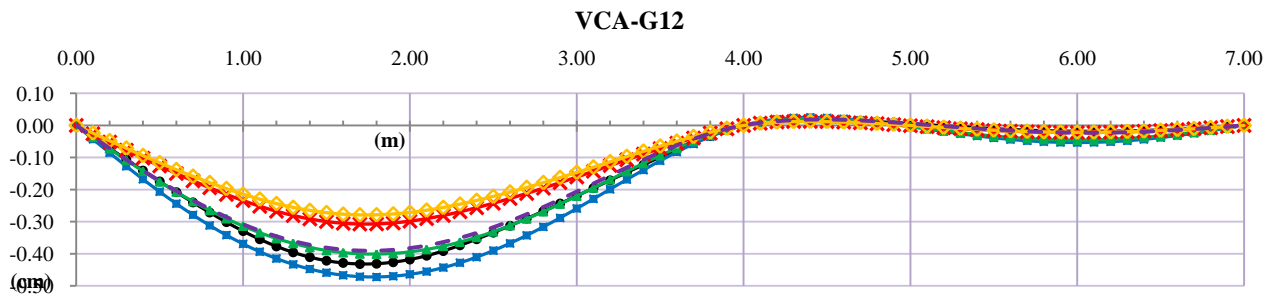
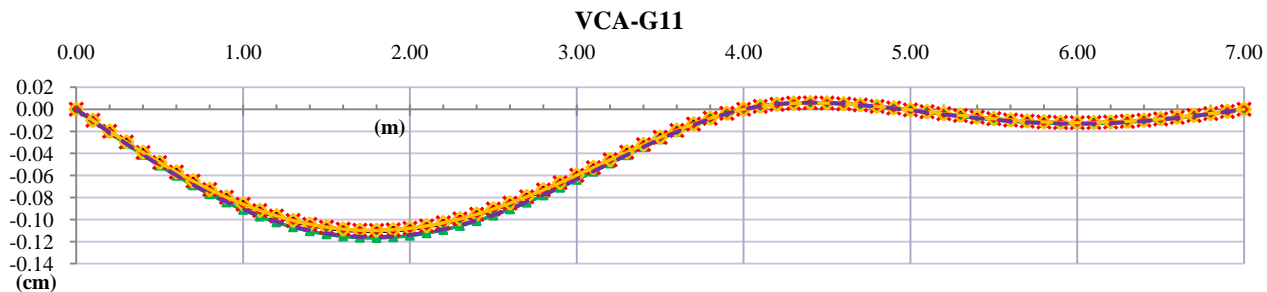


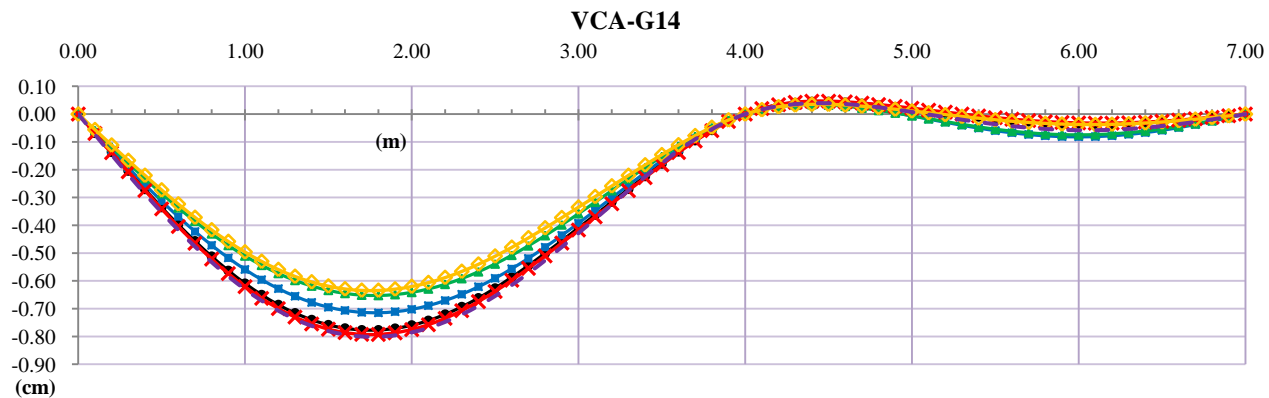
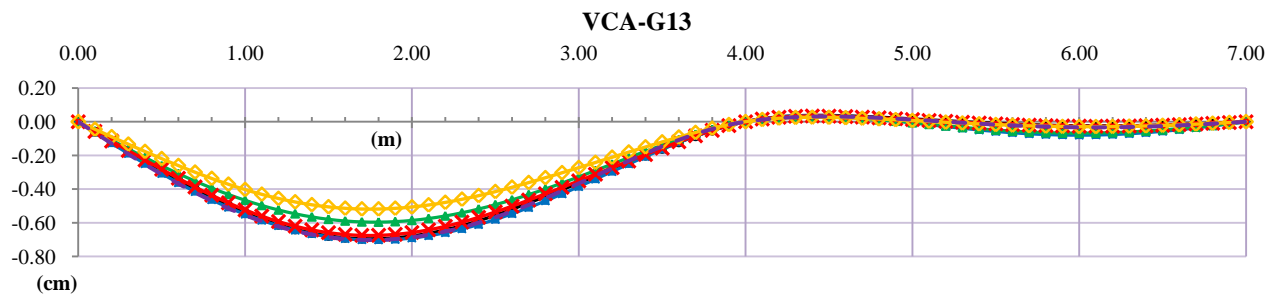
B.2.6 Grupo VC-G6



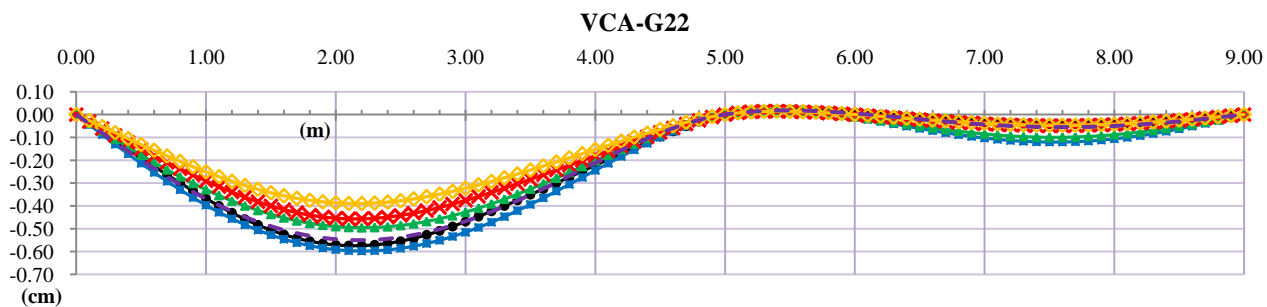
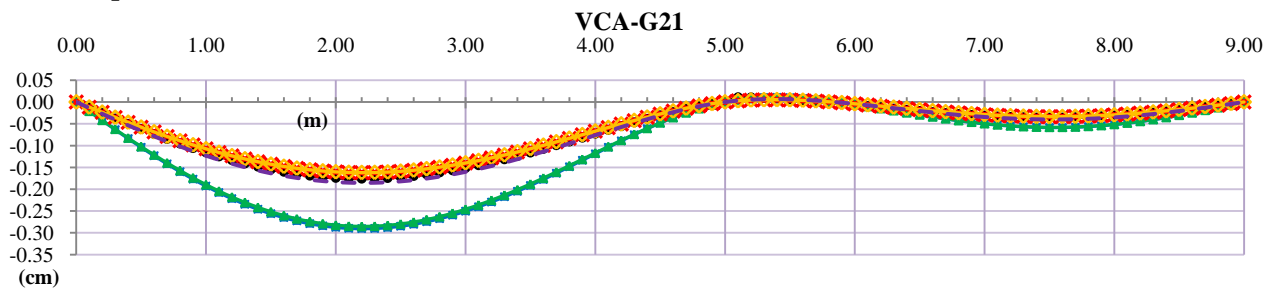


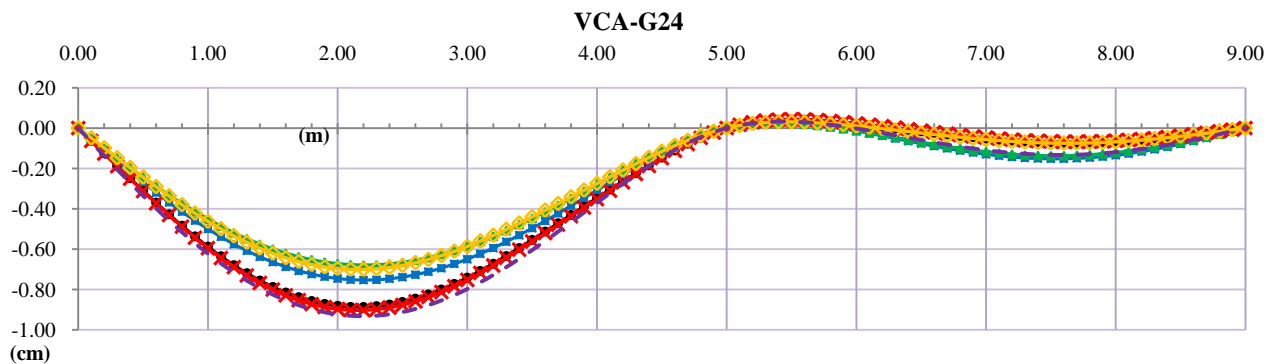
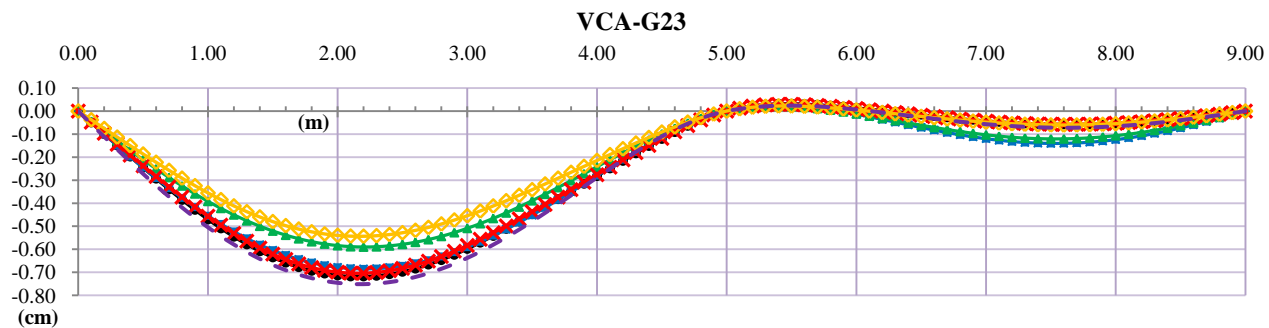
B.2.7 Grupo VCA-G1



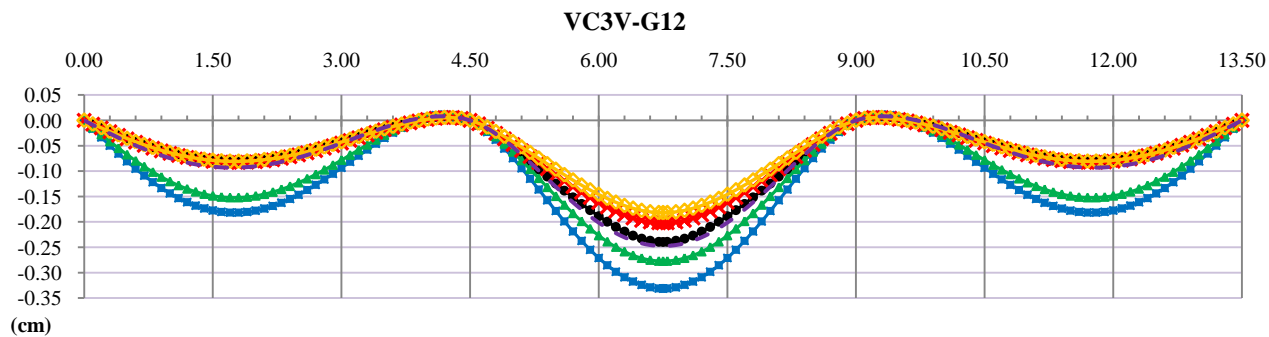
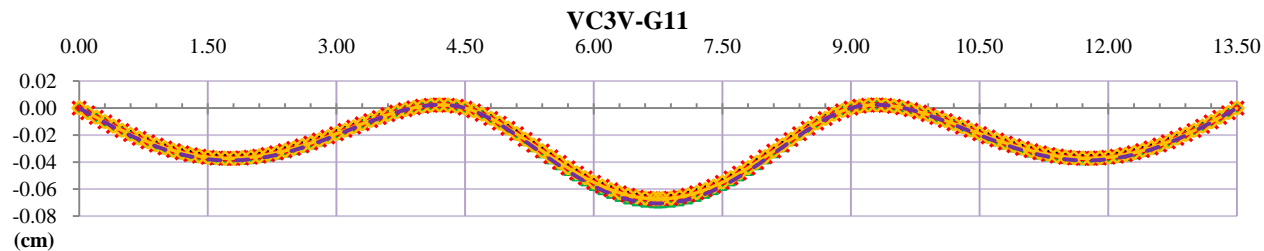


B.2.8 Grupo VCA-G2

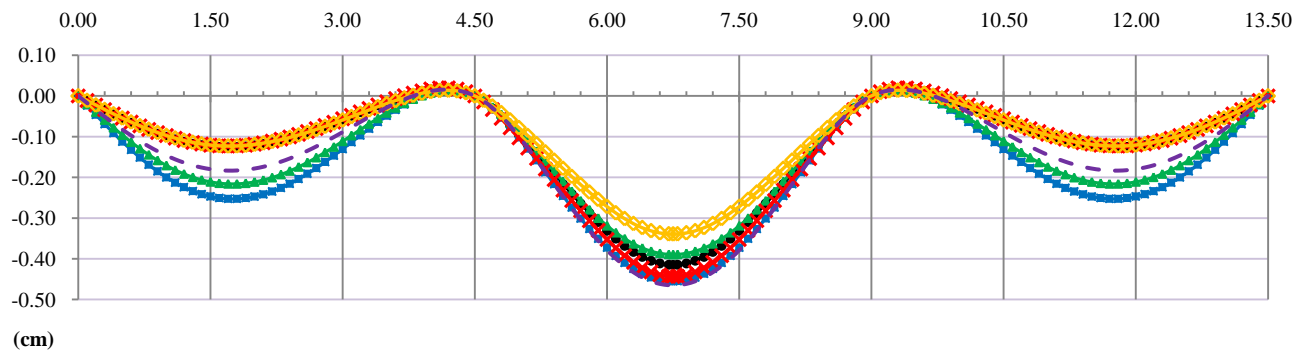




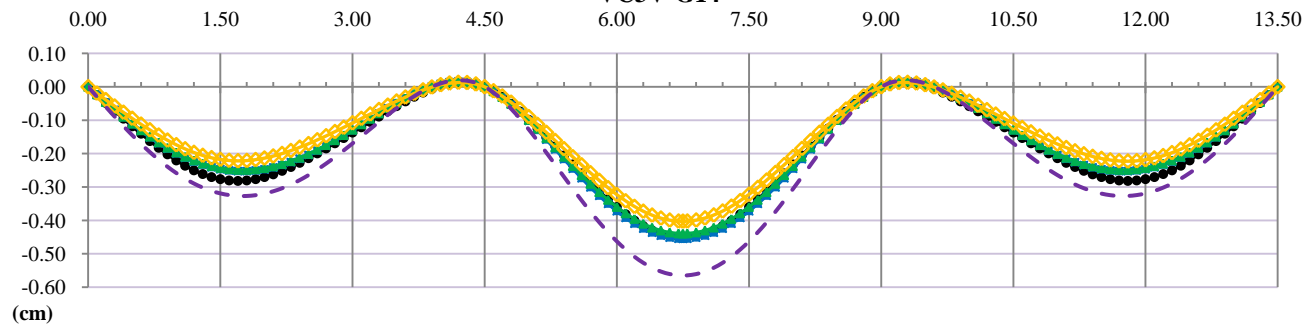
B.2.9 Grupo VC3V-G1



VC3V-G13

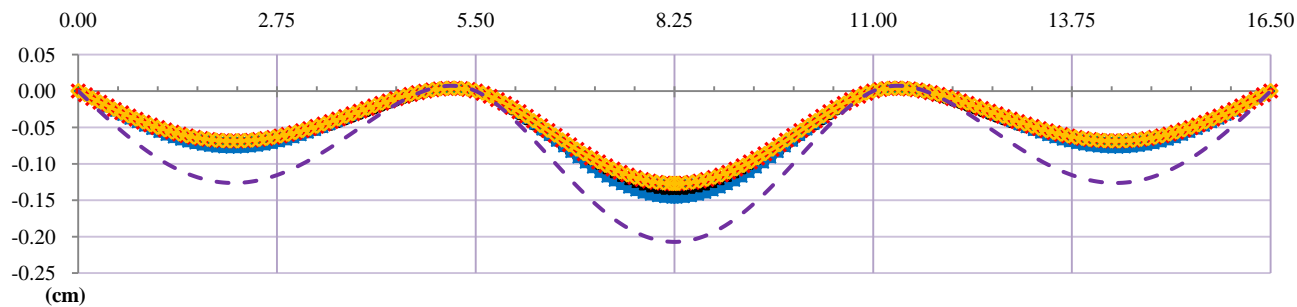


VC3V-G14

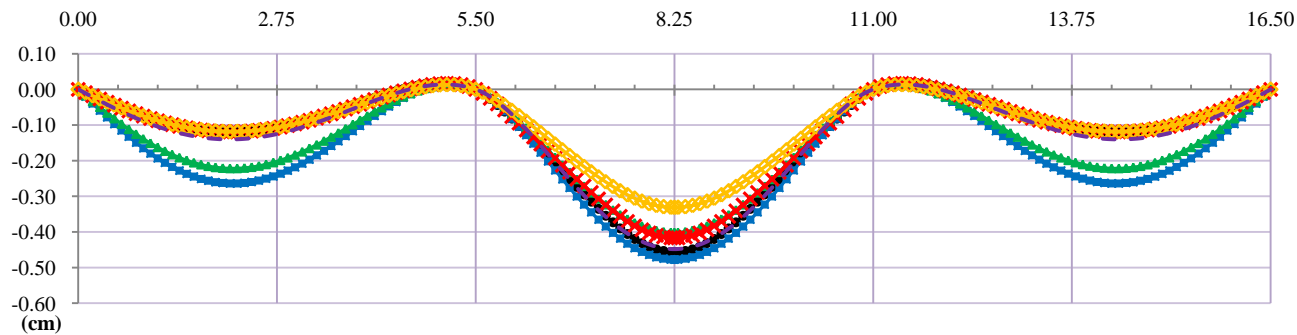


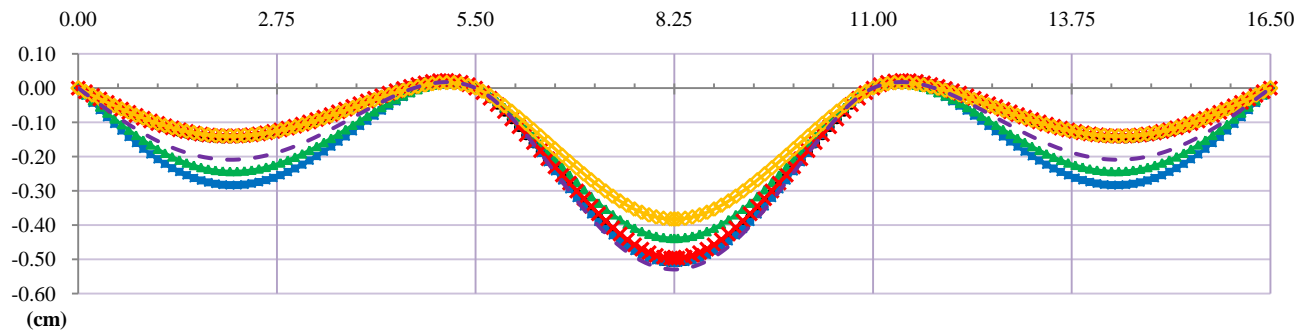
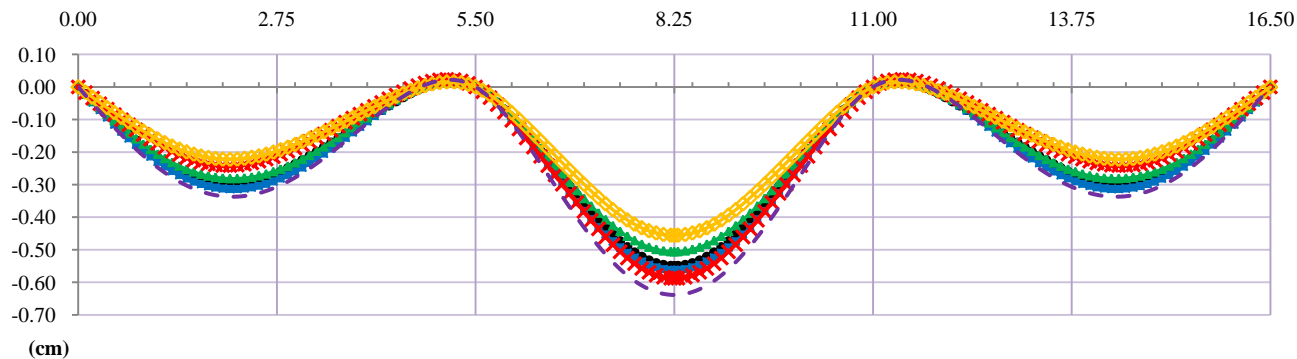
B.2.10 Grupo VC3V-G2

VC3V-G21

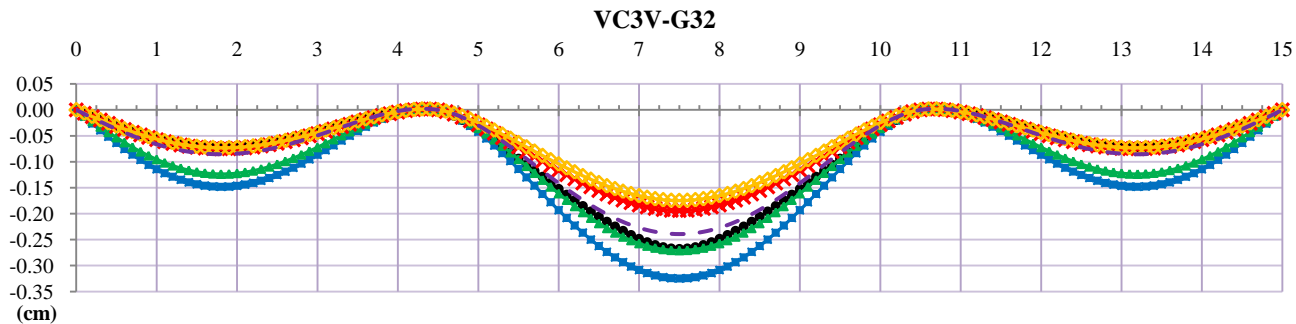
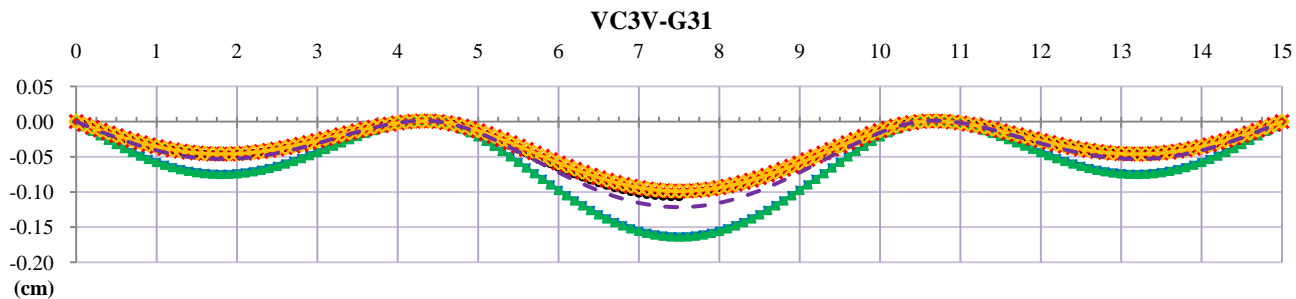


VC3V-G22

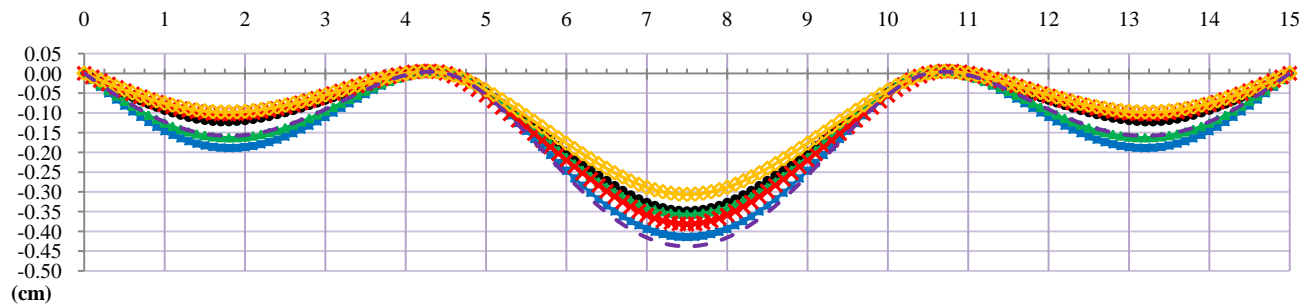


VC3V-G23**VC3V-G24**

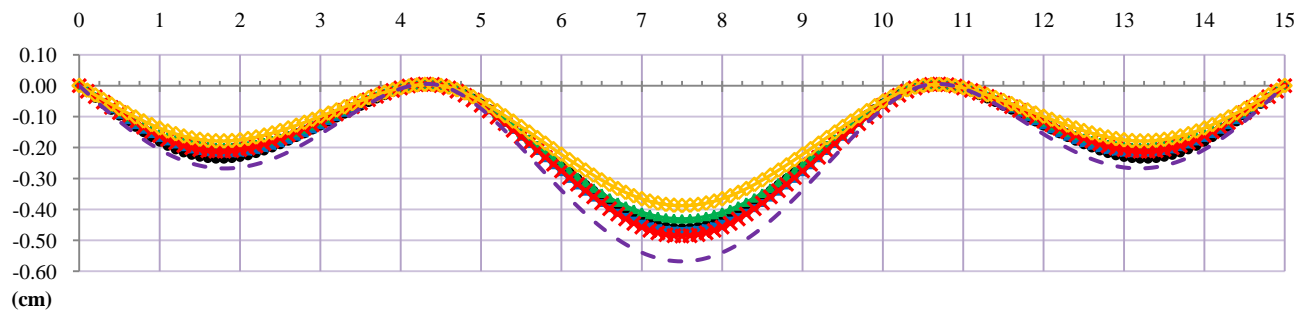
B.2.11 Grupo VC3V-G3



VC3V-G33



VC3V-G34



B.2.12 Grupo VC3V-G4

